

Об одном алгоритме преобразования передаточной функции линейной стационарной динамической системы с кратными полюсами в цифровую форму

Золотухин Е. П.

Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН

Класс линейных стационарных динамических систем (ЛСДС) достаточно широк и хорошо изучен. В виде ЛСДС представляют многие материальные формы (техническое устройство, измерительный прибор, совокупность физических объектов с определенной структурой взаимодействия и т.п.), выполняя соответствующую формализацию рассматриваемых реальных объектов.

ЛСДС описывает связь между входными и выходными сигналами в виде обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами [1]:

$$y(t) = \sum_{i=0}^m b_i \frac{\partial^i x(t)}{(\partial t)^i} - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^i y(t)}{(\partial t)^i}, \quad (1)$$

где $x(t)$ – входной сигнал, $y(t)$ – выходной сигнал, a_i, b_i – постоянные коэффициенты. Для выполнения условия физической реализуемости $n \geq m$.

Одним из способов приближенного решения уравнения (1) является переход от дифференциального уравнения к разностному:

$$\bar{y}(j) = \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{x}(j-i) - \sum_{i=1}^n \nu_i \bar{y}(j-i), \quad j \geq 0, \quad (2)$$

где μ_i и ν_i – постоянные коэффициенты разностного уравнения, а $\bar{x}(j-i)$ и $\bar{y}(j-i)$ – входная и выходная последовательности.

В этом способе переход осуществляется путем дискретизации сигналов $x(t)$, $y(t)$ через равные интервалы времени Δt и представление их в виде последовательностей

$$\{\bar{x}(i)\}, 0 \leq i \leq \lfloor t/\Delta t \rfloor, \quad \{\bar{y}(i)\}, 0 \leq i \leq \lfloor t/\Delta t \rfloor,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – операция взятия целой части от действительного числа. Значения сигналов $x(t)$ и $y(t)$ совпадают со значениями $\bar{x}(i)$ и $\bar{y}(i)$ при $t = i \cdot \Delta t$, $i = 0, 1, \dots$. Кроме этого, дифференциальный оператор в (1) заменяется на разностный оператор из (2).

Для получения коэффициентов разностного уравнения μ_i и ν_i из (1) одним из способов является метод импульсной инвариантной характеристики [2]. Этот метод имеет широкое применение для синтеза цифровых фильтров по аналоговому фильтру-прототипу.

В этом методе импульсная характеристика системы $h(t)$ непрерывной системы (1) заменяется на дискретизированную с периодом квантования Δt импульсную характеристику $\bar{h}(j)$, $j = 0, 1, \dots$ некоторой цифровой системы, описываемой разностным уравнением (2). Здесь: $h(t) = \bar{h}(j \cdot \Delta t)$, $j = 0, 1, \dots$

Для того, чтобы система (2) была адекватна системе (1) в моменты времени $t = i \cdot \Delta t$, $i = 0, 1, \dots$, период квантования Δt должен быть выбран на основании значения частоты среза λ_s частотной характеристики системы (1), полученной как преобразование Фурье импульсной характеристики $h(t)$. Частотная характеристика цифровой системы (2) представляет собой *непрерывную периодическую функцию* $D_s(2\pi f) = f_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(2\pi(f - nf_s))$ с периодом $2\pi f_s$ – бесконечный ряд сдвинутых копий частотной характеристики непрерывной системы $D(2\pi f)$, где $f_s = 1/\Delta t$ – частота дискретизации импульсной характеристики $h(t)$. Поэтому частота дискретизации $f_s = 1/\Delta t$ импульсной характеристики $h(t)$ должна быть не менее, чем в два раза больше частоты среза λ_s частотной характеристики системы (1). В силу этого ограничения метод импульсной инвариантной характеристики непригоден для моделирования систем, не имеющих затухания амплитудно-частотной характеристики в области верхних частот – для дифференцирующих звеньев, фильтров верхних частот.

Получение коэффициентов разностного уравнения (2) по методу импульсной инвариантной характеристики происходит в два этапа [2].

На первом этапе передаточную функцию системы (1) – преобразование Лапласа $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ уравнения (1) представляют в виде суммы элементарных дробей.

Пусть $Y(s) = H(s) \times X(s)$ – преобразование Лапласа (1), тогда

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (3)$$

– *дробно-рациональная передаточная функция системы*

В свою очередь, (3) может быть представлена в виде произведения сомножителей и в виде суммы дробей [3]:

$$H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{\prod (s + \alpha_r)^{m_r}} = \sum_{r=1}^u \sum_{l=1}^{m_r} \frac{C_{r,l}}{(s + \alpha_r)^l} = \sum_{r=1}^u \sum_{l=1}^{m_r} H_{r,l}(s), \quad (4)$$

где α_r – полюсы $H(s)$ с кратностями m_r соответственно, u – количество полюсов, связанное со степенью знаменателя соотношением $n = \sum_{r=1}^u m_r$,

а $C_{r,l}$ – коэффициенты, определяемые формулой

$$C_{r,l} = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial s^l} \left[\frac{Q(s)}{P_r(s)} \right] \text{ при } s = \alpha_r,$$

$$\text{а } P_r(s) = \frac{P(s)}{(s - \alpha_r)^{m_r}}. \quad (5)$$

Для получения $C_{r,l}$ выведены рекуррентные формулы в [4], позволяющие избежать «ручной» операции неоднократного дифференцирования отношения двух полиномов. В настоящее время, на практике используется пакет прикладных программ «MatLab» [5], в котором реализована процедура «residue» разложения передаточной дробно-рациональной функции с кратными корнями на сумму элементарных дробей с использованием алгоритма, описанного в [6].

На втором этапе происходит формирование передаточной функции цифровой системы путем замены каждой элементарной дроби $H_{r,l}(s)$ из (4) на $H_{r,l}(z)$ при помощи подстановки:

$$H_{r,l}(s) = \frac{C_{r,l}}{(s + \alpha_r)^l} \Rightarrow H_{r,l}(z) = \frac{(-1)^{l-1} \cdot C_{r,l}}{(l-1)!} \times \frac{\partial^{l-1}}{\partial \alpha_r^{l-1}} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha_r \Delta t} z^{-1}} \right), \quad (6)$$

где Δt – период квантования. Выполняя (6) для всех дробей из (4), получим:

$$H_{r,l}(z) = \left(\frac{C_{r,1}}{(1 - e^{-\alpha_r \Delta t} z^{-1})} - \frac{C_{r,2}}{1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{(1 - e^{-\alpha_r \Delta t} z^{-1})} \right) + \frac{C_{r,3}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{1}{(1 - e^{-\alpha_r \Delta t} z^{-1})} \right) - \dots \right),$$

откуда

$$H(z) = \sum_{r=1}^u \sum_{l=1}^{m_r} H_{r,l}(z). \quad (7)$$

Из (6) видно, что если передаточная функция $H(s)$ ЛСДС в (4) содержит полюсы с кратностью $m_r \geq 2$, то для вычисления передаточной функции цифровой модели ЛСДС необходимо применить, также как и на первом этапе, трудоемкую опера-

цию $(m_r - 1)$ -кратного дифференцирования выражения $(1/(1 - e^{-\alpha_r \Delta t} z^{-1}))$.

В [7] при отображении (6) из s -плоскости в z -плоскость дроби $(1/(s + \alpha)^{v+1})$ вместо операции дифференцирования предлагается вычисление полинома $R_v(e^{-\alpha \Delta t} z^{-1})$, представленного в виде нормированного по v определителя $R_v(x) = v! |R(x)|$ некоторой R – квадратной матрицы переменных x размерностью $v \times v$, где матрица

$$R(x) = \begin{pmatrix} 1 & (1-x) & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 1 & (1-x) & \dots & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/v & 1/(v-1) & 1/(v-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

при $x = (e^{-\alpha \Delta t} z^{-1})$, $v = 1, 2, \dots$,

$$H_v(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^{v+1}} \Rightarrow H_v(z) = \frac{(-1)^v}{v!} \frac{\partial^v}{\partial \alpha^v} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha \Delta t} z^{-1}} \right) = \Delta t^v \frac{z^{-1} R_v(e^{-\alpha \Delta t} z^{-1})^v e^{\alpha \Delta t}}{v! (1 - e^{-\alpha \Delta t} z^{-1})^{v+1}}. \quad (9)$$

Вычисление по (9), с использованием определителя матрицы (8), также не менее затруднительно, чем выполнение операции дифференцирования отношения двух полиномов для $v \geq 3$.

Покажем в этой работе, что отображении (6) из s -плоскости в z -плоскость для случая кратных корней можно осуществить более простым и эффективным в вычислительном плане способом. Введем $\Theta_l(z, \alpha)$ как функцию l -кратного дифференцирования по α такую, что в (7) $H_{r,l}(z) = \frac{(-1)^{l-1} \cdot C_{r,l}}{(l-1)!} \times \Theta_l(z, \alpha)$.

Обозначим:

$$\Theta_k(z, \alpha) = \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha \Delta t} z^{-1}} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Theta_{k-1}(z, \alpha)) \quad (10)$$

для $k = 1, 2, \dots$, и $\Theta_0(z, \alpha) = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-\alpha \Delta t}}$.

Докажем по индукции, что

$$\Theta_k(z, \alpha) = \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha \Delta t} z^{-1}} \right) = \frac{Q_k(z, \alpha)}{P_k(z, \alpha)} = \frac{(-1)^k \cdot \Delta t^k \sum_{i=1}^k (\tilde{a}_{i,k} \cdot e^{-i \alpha \Delta t} \cdot z^{-i})}{(1 - e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1})^{k+1}}, \quad (11)$$

где $\tilde{a}_{i,k}$ – некоторые целые числа.

При $k = 1$, имеем

$$\Theta_1(z, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha \Delta t} z^{-1}} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{Q_1(z, \alpha)}{P_1(z, \alpha)} \right) =$$

$$= \frac{P_1(z, \alpha) \cdot \frac{\partial Q_1(z, \alpha)}{\partial \alpha} - Q_1(z, \alpha) \cdot \frac{\partial P_1(z, \alpha)}{\partial \alpha}}{[P_1(z, \alpha)]^2}, \quad (12)$$

$$\Theta_1(z, \alpha) = \frac{-\Delta t \cdot e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1}}{(1 - e^{-\alpha \Delta t} z^{-1})^2}, \text{ откуда } \tilde{a}_{1,1} = 1,$$

При $k = n \geq 2$, n – произвольное целое число, имеем

$$\Theta_n(z, \alpha) = \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha \Delta t} z^{-1}} \right) = \frac{Q_n(z, \alpha)}{P_n(z, \alpha)} =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot \Delta t^n \sum_{i=1}^n (\tilde{a}_{i,n} \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i})}{(1 - e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1})^{n+1}}. \quad (13)$$

При $k = n + 1$, имеем

$$\Theta_{n+1}(z, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{Q_n(z, \alpha)}{P_n(z, \alpha)} \right) =$$

$$= \frac{P_n(z, \alpha) \cdot \frac{\partial Q_n(z, \alpha)}{\partial \alpha} - Q_n(z, \alpha) \cdot \frac{\partial P_n(z, \alpha)}{\partial \alpha}}{[P_n(z, \alpha)]^2}. \quad (14)$$

Вычисляя из (13)

$$P_n(z, \alpha) = (1 - e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1})^{n+1},$$

$$\frac{\partial P_n(z, \alpha)}{\partial \alpha} = (n+1) \cdot \Delta t \cdot e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1} \cdot (1 - e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1})^n,$$

$$Q_n(z, \alpha) = (-1)^n \cdot \Delta t^n \sum_{i=1}^n (\tilde{a}_{i,n} \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i}),$$

$$\frac{\partial Q_n(z, \alpha)}{\partial \alpha} = (-1)^{n+1} \cdot \Delta t^{n+1} \sum_{i=1}^n i \cdot (\tilde{a}_{i,n} \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i}),$$

Получим

$$\Theta_{n+1}(z, \alpha) = \frac{XA}{Y} = \frac{XB}{Y} + \frac{XC}{Y} = \frac{XD}{Y},$$

где

$$X = (-1)^{n+1} \cdot \Delta t^{n+1},$$

$$Y = (1 - e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1})^{n+2},$$

$$A = (1 - e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1}) \left(\sum_{i=1}^n i \cdot (\tilde{a}_{i,n} \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i}) \right) +$$

$$+ (n+1) \cdot e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1} \left(\sum_{i=1}^n (\tilde{a}_{i,n} \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i}) \right),$$

$$B = \sum_{i=1}^n i \cdot (\tilde{a}_{i,n} \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i}) - z^{-1} e^{-\alpha \Delta t} \sum_{i=1}^n i \cdot (\tilde{a}_{i,n} \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i}),$$

$$C = (n+1) \cdot e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1} \left(\sum_{i=1}^n (\tilde{a}_{i,n} \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i}) \right),$$

$$D = \tilde{a}_{1,n} \cdot e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1} +$$

$$+ \sum_{i=2}^n (i \tilde{a}_{i,n} + (n-i+2) \tilde{a}_{i-1,n}) \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i} +$$

$$+ \tilde{a}_{n,n} \cdot e^{-(n+1)\alpha \Delta t} \cdot z^{-(n+1)}.$$

Обозначая

$$\tilde{a}_{1,n+1} = \tilde{a}_{1,n} = \tilde{a}_{1,1} = 1$$

$$\tilde{a}_{i,n+1} = i \cdot \tilde{a}_{i,n} + (n-i+2) \cdot \tilde{a}_{i-1,n} \quad \text{и} \quad \tilde{a}_{i,n+1} = \tilde{a}_{i,n} \quad \text{и} \quad i = 2, \dots, n \quad (15)$$

Получим

$$\Theta_{n+1}(z, \alpha) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \Delta t^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (\tilde{a}_{i,n+1} \cdot e^{-i\alpha \Delta t} \cdot z^{-i})}{(1 - e^{-\alpha \Delta t} \cdot z^{-1})^{n+2}}. \quad (16)$$

Что и требовалось доказать – правильность выражения (11) для любой производной по α .

Выражение (15) определяет основные рекуррентные соотношения для вычисления $H_{r,l}(z)$ в (6).

Перепишем (6) с использованием доказанного выражения (11):

$$H_{r,l}(z, \alpha_r) = \frac{(-1)^{l-1} \cdot C_{r,l}}{(l-1)!} \times \Theta_{l-1}(z, \alpha_r) =$$

$$= \frac{(-1)^{l-1} \cdot C_{r,l}}{(l-1)!} \times \frac{(-1)^{l-1} \cdot \Delta t^{l-1} \sum_{i=1}^{l-1} (\tilde{a}_{i,l-1} \cdot e^{-i\alpha_r \Delta t} \cdot z^{-i})}{(1 - e^{-\alpha_r \Delta t} \cdot z^{-1})^l} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{l-1} \left(\frac{C_{r,l} \cdot \Delta t^{l-1} \cdot e^{-i\alpha_r \Delta t}}{(l-1)!} \cdot \tilde{a}_{i,l-1} \cdot z^{-i} \right)}{(1 - e^{-\alpha_r \Delta t} \cdot z^{-1})^l} =$$

$$= H_{r,l}(z, \alpha_r) = \frac{\sum_{i=1}^{l-1} (\varphi_{i,l-1} \cdot z^{-i})}{\sum_{i=0}^l (\psi_{i,l} \cdot z^{-i})}, \quad (17)$$

$$\text{Где } \varphi_{i,l-1} = \frac{C_{r,l} \cdot \Delta t^{l-1} \cdot e^{-i\alpha_r \Delta t}}{(l-1)!} \cdot \tilde{a}_{i,l-1}, \quad (18)$$

$$\psi_{i,l} = (-1)^i e^{-i\alpha_r \Delta t} \cdot \binom{l}{i} = (-1)^i e^{-i\alpha_r \Delta t} \frac{l!}{i!(l-i)!}, \quad (19)$$

$$\tilde{a}_{1,l} = \tilde{a}_{1,l} = \tilde{a}_{l,l} = 1 \quad \text{при } l = 1, \dots, m$$

$$\tilde{a}_{i,l} = i \cdot \tilde{a}_{i,l-1} + (l-i+1) \cdot \tilde{a}_{i-1,l-1} \quad \text{при } i = 2, \dots, l-1, l = 1, \dots, m \quad (20)$$

$$H(z) = \sum_{r=1}^u \sum_{l=1}^{m_r} H_{r,l}(z, \alpha_r) = \sum_{r=1}^u \sum_{l=1}^{m_r} \frac{\sum_{i=1}^{l-1} (\varphi_{i,l-1} \cdot z^{-i})}{\sum_{i=0}^l (\psi_{i,l} \cdot z^{-i})}. \quad (21)$$

Сворачивая (21) в дробно-рациональную функцию, получим коэффициенты искомого разностного уравнения (2):

$$H(z) = \sum_{r=1}^u \sum_{l=1}^{m_r} \frac{\sum_{i=1}^{l-1} (\varphi_{i,l-1} \cdot z^{-i})}{\sum_{i=0}^l (\psi_{i,l} \cdot z^{-i})} = \frac{\sum_{i=1}^n (\mu_i \cdot z^{-i})}{\sum_{i=1}^n (\nu_i \cdot z^{-i})}. \quad (22)$$

Алгоритм нахождения коэффициентов μ_i и ν_i следующий:

1. По представлению дифференциального уравнения (1), либо передаточной функции (4) формируем векторы коэффициентов $\vec{A}, \vec{B}$ размерностью n , равной порядку уравнения (1).
2. С помощью программы «residue» из пакета MatLab [5] по векторам коэффициентов $\vec{A}, \vec{B}$ выполняем разложение (3) на элементарные дроби – результатом работы программы являются вектор полюсов $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_u)$, $r = 1, u$ – с кратностями m_r , u – количество некротных корней, и матрицы коэффициентов $(C_{r,l})$, $r = 1, u; l = 1, m_r$;
3. Проверяем, нет ли среди полюсов α_r , полюса с вещественной частью больше нуля. Если есть, то на выход п. 9 – уравнение (1) описывает неустойчивую ЛСДС. В противном случае продолжаем далее.
4. С помощью программы «freqs» из пакета Signal Processing Toolbox – дополнения пакета MatLab [5] по векторам коэффициентов $\vec{A}, \vec{B}$ – вычисляем амплитудно-частотную характеристику ЛСДС. Определяем частоту среза системы λ_s частотной характеристики системы (1). Обычно принимают значение частоты, при которой амплитудно-частотная характеристика становится в 1000 раз меньше, чем в полосе пропускания, равное затуханию 60 децибел. Выбирая частоту дискретизации $f_s = 1/\Delta t$, не менее, чем в два раза превышающую частоту среза λ_s частотной характеристики системы, получаем

минимальный период квантования (период дискретизации) Δt , как обратную величину от f_s .

5. Проверяем, есть ли в разложении на элементарные дроби кратные полюсы α_r . Если нет, то с помощью программы «invar» из пакета MatLab [5] вычисляем коэффициенты цифровой модели и переходим на выход п. 9. В противном случае продолжаем далее.
6. Используя (20), рассчитаем значения коэффициентов $\tilde{a}_{i,l}$. В случаях многократного использования целесообразно коэффициенты $\tilde{a}_{i,l}$ записать в треугольную матрицу. В частности, для кратности полюса вплоть до 8, матрица коэффициентов по (20) изображена на рисунке.
7. Для каждого полюса α_r с кратностью m_r , используя рассчитанные коэффициенты $\tilde{a}_{i,l}$, по (18) и (19) вычисляем векторы коэффициентов $\vec{\varphi}_l / \vec{\psi}_l = \{\varphi_{1,l}, \dots, \varphi_{i,l}, \dots, \varphi_{l-1,l}\} / \{\psi_{0,l}, \dots, \psi_{i,l}, \dots, \psi_{l,l}\}$, $l = 1, \dots, m_r, r = 1, u$ для всех u некротных корней.

Уравнение (21) представляющее собой двойную сумму из $n = \sum_{r=1}^u m_r$ элементарных цифровых фильтров, описываемых разностными уравнениями с векторами коэффициентов $\vec{\varphi}_l / \vec{\psi}_l$ – это представление цифровой системы (фильтра) в параллельной форме [2]. Это представление является часто более предпочтительным, когда ограничение точности представления коэффициентов и переменных начинает существенно влиять на характеристики системы. Для получения коэффициентов в прямой форме [2] перейдем к следующему пункту, иначе на выход п. 9.

8. Используя программу свертывания суммы элементарных дробей в дробно-рациональную функцию из пакета MatLab [5], вычисляем ко-

$m_r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$i = 1;$	$\tilde{a}_{1,1} = 1;$	$\tilde{a}_{1,2} = 1;$	$\tilde{a}_{1,3} = 1;$	$\tilde{a}_{1,4} = 1;$	$\tilde{a}_{1,5} = 1;$	$\tilde{a}_{1,6} = 1;$	$\tilde{a}_{1,7} = 1;$	$\tilde{a}_{1,8} = 1;$	$\tilde{a}_{1,\dots} = 1;$
$i = 2;$		$\tilde{a}_{2,2} = 1;$	$\tilde{a}_{2,3} = 4;$	$\tilde{a}_{2,4} = 11;$	$\tilde{a}_{2,5} = 26;$	$\tilde{a}_{2,6} = 57;$	$\tilde{a}_{2,7} = 120;$	$\tilde{a}_{2,8} = 247;$	$\tilde{a}_{2,\dots} = \dots$
$i = 3;$			$\tilde{a}_{3,3} = 1;$	$\tilde{a}_{3,4} = 11;$	$\tilde{a}_{3,5} = 66;$	$\tilde{a}_{3,6} = 302;$	$\tilde{a}_{3,7} = 1191;$	$\tilde{a}_{3,8} = 4293;$	$\tilde{a}_{3,\dots} = \dots$
$i = 4;$				$\tilde{a}_{4,4} = 1;$	$\tilde{a}_{4,5} = 26;$	$\tilde{a}_{4,6} = 302;$	$\tilde{a}_{4,7} = 2416;$	$\tilde{a}_{4,8} = 15619;$	$\tilde{a}_{4,\dots} = \dots$
$i = 5;$					$\tilde{a}_{5,5} = 1;$	$\tilde{a}_{5,6} = 57;$	$\tilde{a}_{5,7} = 1191;$	$\tilde{a}_{5,8} = 15619;$	$\tilde{a}_{5,\dots} = \dots$
$i = 6;$						$\tilde{a}_{6,6} = 1;$	$\tilde{a}_{6,7} = 120;$	$\tilde{a}_{6,8} = 4293;$	$\tilde{a}_{6,\dots} = \dots$
$i = 7;$							$\tilde{a}_{7,7} = 1;$	$\tilde{a}_{7,8} = 247;$	$\tilde{a}_{7,\dots} = \dots$
$i = 8;$								$\tilde{a}_{8,8} = 1;$	$\tilde{a}_{8,\dots} = \dots$
$i = 9;$									$\tilde{a}_{9,\dots} = 1;$
...									

эффиценты цифровой модели в прямой форме.

9. Выход.

Описанный алгоритм позволяет эффективно применять метод импульсной инвариантной характеристики для моделирования ЛСДС без ограничения на кратность полюсов в ее передаточной функции.

Литература

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. –М.:Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.- 311с.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. Пер. с англ. –М.: Мир, 1978 – 848с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Гл. 9.4, Пер. с англ. –М.: Наука; 1984. – 832 с.
4. Чжань-Фэнь-Джен. Рекуррентные формулы для разложения на элементарные дроби рациональной функции с кратными полюсами // Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, Пер. с англ. журнала Proc. IEEE. 1973, т.61, №8. С. 98–99
5. Дьяконов В. П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. Основы применения. М.: Солон-Пресс, 2005.-800с
6. Oppenheim A.V., Schafer R.W. Digital Signal Processing. Prentice-Hall, 1975, P. 56–58.
7. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. М.:Наука; 1976.-576 с.