Алгоритм распознавания алфавита векторов, порождающего последовательности с квазипериодической структурой

А. В. Кельманов, С. А. Хамидуллин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

Рассматривается проблема помехоустойчивого апостериорного (off-line) распознавания алфавита векторов, порождающего последовательности, включающие квазипериодически перемежающиеся вектор-фрагменты, совпадающие с элементами из этого алфавита. Исследуется дискретная экстремальная задача, к которой сводится один из вариантов данной проблемы. Обоснован точный полиномиальный алгоритм решения редуцированной задачи, гарантирующий максимально правдоподобное принятие решения, в случае если помеха аддитивна и является гауссовой последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, а количество перемежающихся вектор-фрагментов неизвестно. Показано, что предложенный алгоритм имеет существенно меньшую трудоемкость по сравнению с известным аналогом.

Ключевые слова: дискретная экстремальная задача, эффективный алгоритм, числовая последовательность, квазипериодические фрагменты, алфавит векторов, off-line-распознавание, гауссова помеха, максимум правдоподобия.

Abstract. In this paper we analyse one variant of the off-line recognition problem of the vector alphabet in the case when this alphabet is a generator of sequences having quasiperiodical vector-fragments and these fragments coincide with alphabet's vectors. It is shown that the solution of this problem is reduced to solution of special optimization problem. An algorithm for exact solution to this problem is proven. This algorithm guarantees the maximum-likelihood recognition of the vector alphabet under condition when (1) the noise is additive and this noise is a Gaussian sequence of independent random values having identical distribution, and (2) the number of vector-fragments is unknown. The algorithm we have presented has essentially smaller computational complexity in comparison with known one.

Key words: discrete optimization problem, efficient algorithm, alphabet of vectors, off-line recognition, Gaussian noise, maximum-likelihood, numerical sequence, quasiperiodical fragments.

Введение. Объект исследования настоящей работы – проблемы оптимизации в задачах анализа данных и распознавания образов. Предмет исследования – дискретная экстремальная задача, к которой сводится один из вариантов проблемы помехоустойчивого апостериорного (off-line) распознавания алфавита векторов, порождающего последовательности, включающие квазипериодически перемежающиеся информационные фрагменты, совпадающие с элементами из этого алфавита. Цель работы – обосновать алгоритм решения данной задачи, дать развернутое доказательство результатов, в краткой форме представленных в [1].

Одна из возможных содержательных задач, соответствующих рассматриваемой математической задаче, заключается в следующем. Имеется совокупность физических объектов, каждый из которых может находиться в пассивном и конечном множестве различающихся активных состояний. Элементам данного множества однозначно соответствуют элементы известного алфавита импульсов одинаковой длительности, но различной формы. Пассивному состоянию соответствует отсутствие каких-либо импульсов. Алфавиты импульсов не пересекаются. Источник сообщений передает информацию о пассивных и активных состояниях некоторого физического объекта с помощью импульсов из алфавита. На приемную сторону поступает дискретный сигнал в виде зашумленной последовательности квазипериодически перемежающихся импульсов. Термин "квазипериодически" означает, что интервалы между двумя последовательными импульсами не одинаковы, а лишь ограничены сверху и снизу некоторыми константами. Время поступления импульсов в принятой последовательности неизвестно. Требуется определить, какому объекту соответствует принятая последовательность. Иными словами, задача состоит в распознавании алфавита или источника передаваемых импульсов. Ситуации, в которых возникает эта задача, характерны, в частности, для электронной раз-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 07-07-00022, 09-01-00032).

ведки, геофизики, гидроакустики, телекоммуникации, распознавания речевых сигналов и т. д. (см., например, работу [2] и библиографию к ней).

Для решения поставленной задачи можно применить последовательный on-line-подход, основанный на фундаментальных результатах, изложенных в работе [3]. Реализация этого широко распространенного и традиционного подхода сводится к корректному использованию известных методов и алгоритмов: 1) последовательного обнаружения [4-8], 2) оптимальной фильтрации [9-11], 3) принятия решения [12-13]. Однако известно, что в общем случае последовательный подход не гарантирует оптимальности решения по совокупности данных (дискретных значений сигнала), накопленных за весь период наблюдения. Данный подход ориентирован на решение задачи с наименьшими временными затратами.

Альтернативный off-line-подход к решению сформулированной задачи изучался в работе [14], в которой предложен полиномиальный алгоритм, гарантирующий оптимальность решения по критерию максимума функционала правдоподобия, в случае если помеха аддитивна и является гауссовой последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, причем суммарное число перемежающихся информационных фрагментов в последовательности известно. Ранее полиномиальные off-line-алгоритмы, гарантирующие оптимальность решения по какому-либо из классических критериев, не были известны. Данный алгоритм можно использовать в качестве базового в полиномиальной процедуре отыскания оптимального решения задачи, когда число информационных фрагментов в обрабатываемой последовательности неизвестно [14]. Как показано в работе [14], временная сложность такой процедуры пропорциональна квадрату максимального числа информационных фрагментов, что для некоторых важных приложений оказывается слишком затратным. Поэтому необходимо построить алгоритм, имеющий меньшую трудоемкость и обеспечивающий оптимальность решения задачи при тех же, что и в [14], условиях.

1. Постановка задачи. Числовой последовательностью, включающей квазипериодически перемежающиеся ненулевые информационные фрагменты размерности q, называется последовательность, общий член которой задается формулой

$$x_n = \sum_{m\in\mathbf{M}} u_{n-n_m}(m), \quad n = 0,\ldots,N-1, \tag{1.1}$$

где $u_{n-n_m}(m)=0$, если $n-n_m \neq 0,\ldots,q-1$, $\| u_0(m),\ldots,u_{q-1}(m) \| \neq 0$ при любом $m\in\mathbf{M}=\{1,\ldots,M\}$; $(n_1,\ldots,n_M)\in\Omega$;

$$\Omega = \bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}} \Omega_M , \tag{1.2}$$

$$\Omega_M = \Omega_M(N,N^-,N^+,T_{\min},T_{\max},q) = \{(n_1,\ldots,n_M) \,|\, 0 \le n_1 \le N^+ \le N-q;$$
$$0 \le N^- \le n_M \le N-q;\ \ 0<q\le T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N-q,\, m=2,\ldots,M\}; \tag{1.3}$$

параметры $M_{\min}$, $M_{\max}$ находятся из решения системы неравенств, входящих в определение множества Ω_M, в которой N^-, N^+, $T_{\min}$, $T_{\max}$ – целые числа.

Набор $U_m = (u_0(m),\ldots,u_{q-1}(m)) \in \mathbb{R}^q$ называется информационным вектором, последовательность его компонент – информационной последовательностью. Набор $(x_{n_m},\ldots,x_{n_m+q-1})$ элементов последовательности x_n, $n=0,\ldots,N-1$, совпадающий с вектором U_m, называется информационным фрагментом. В формуле (1.1) переменная m обозначает порядковый номер информационного фрагмента, переменная n_m задает номер n в последовательности x_n, $n=0,\ldots,N-1$, который соответствует началу m-го фрагмента, переменная $M=|\mathbf{M}|$ обозначает число информационных фрагментов в данной последовательности.

В формуле (1.2), определяющей множество возможных наборов начальных номеров информационных фрагментов, параметры $M_{\min}$, $M_{\max}$ обозначают минимальное и максимальное число информационных фрагментов. Переменные N^-, N^+ в соотношениях (1.3) задают краевые условия на начальные номера первого и последнего информационных фрагментов последовательности, а $T_{\min}$ и $T_{\max}$ – минимальный и максимальный интервалы между двумя последовательными информационными фрагментами. Ограничение $T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N - q$ ($m = 2,\dots,M$) называется условием квазипериодичности информационных фрагментов, неравенство $q \le T_{\min}$ – условием, запрещающим перекрытие (наложение) фрагментов.

Предположим, что $U_m \in A$, $m \in \mathbf{M}$, где $A \subset \{U \mid U \in \mathbb{R}^q,\ 0 < \| U \|^2 < \infty\}$, причем $|A| < \infty$. Множество A будем называть алфавитом информационных векторов. Кроме того, будем полагать, что $A \in \mathbf{A}$, где $\mathbf{A} = \bigcup_{j=1}^{J} A_j$ – совокупность алфавитов, причем $A_k \cap A_j = \varnothing$, если $k \ne j$, $|A_j| = K_j$, $j = 1,\dots,J$, $\sum_{j=1}^{J} K_j = K$. Будем также считать, что последовательность вида (1.1) порождается информационными векторами из некоторого алфавита A. Обозначив $X = (x_0,\dots,x_{N-1})$, получаем $\mathbf{X} = X(n_1,\dots,n_M, U_1,\dots,U_M, A)$, т. е. вектор $\mathbf{X}$ зависит от наборов $(n_1,\dots,n_M)$, $(U_1,\dots U_M)$ и алфавита A.

В сформулированной выше модели информационный фрагмент и информационный вектор соответствуют импульсу из содержательной задачи, приведенной во введении. Соответствие между остальными элементами модели и содержательной задачи очевидно.

Как показано в работе [15], необходимым и достаточным условием совместности системы ограничений, входящих в определения (1.2), (1.3), является выполнение неравенства

$$\lfloor (N-q)/T_{\min} \rfloor \ge \lfloor (N^- - N^+ + T_{\max} - 1)/T_{\max} \rfloor. \tag{1.4}$$

Всюду далее будем считать неравенство (1.4) выполненным (в противном случае модель последовательности и формулировка проблемы некорректны). При этом (см. [16])

$$\begin{aligned} M_{\min} &= \begin{cases} \lfloor (N^- - N^+ + T_{\max} - 1)/T_{\max} \rfloor + 1, & N^- > N^+, \\ 1, & N^- \le N^+, \end{cases} \\ M_{\max} &= \lfloor (N-q)/T_{\min} \rfloor + 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Рассмотрим аддитивную модель помех (или ошибок наблюдения). Доступным для обработки (наблюдения) будем считать вектор $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ – вектор помехи). Предположим, что векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{E}$ независимы. В статистической трактовке проблемы будем считать, что $\mathbf{E} \in \Phi_{0,\sigma^2 I}$, где $\Phi_{0,\sigma^2 I}$ – нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2 I)$, I – единичная матрица. Задача распознавания состоит в том, чтобы по заданному (наблюдаемому) вектору $\mathbf{Y}$ найти алфавит $A \in \mathbf{A}$ векторов, порождающий последовательность вида (1.1).

Примеры последовательностей, порождаемых различными алфавитами, и подлежащей обработке наблюдаемой последовательности, приведены на рис. 1, 2.

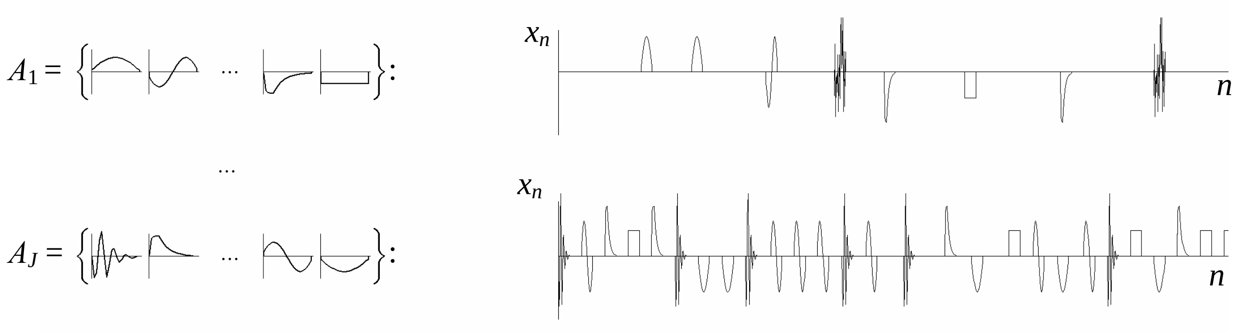

Рис. 1. Алфавит (слева) и порожденные им последовательности (справа)

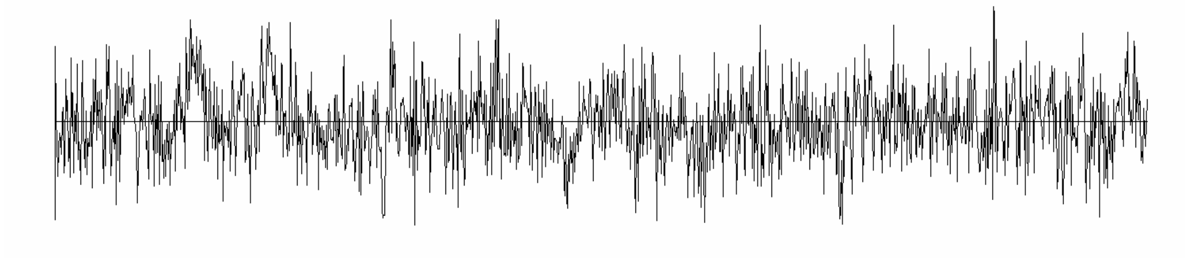

Рис. 2. Наблюдаемая последовательность

Далее приводится уточнение формулировки задачи распознавания в соответствии с критерием принятия решения. В этой формулировке выделен специальный случай (далее называемый предельным) задания множеств (1.2), (1.3), соответствующий распространенной на практике ситуации, когда значения N^-, N^+, $T_{\min}$, $T_{\max}$ неизвестны. Из соотношения (1.2) видно, что в данной ситуации достаточно положить $N^+ = T_{\max} = N - q$, $N^- = 0$, $T_{\min} = q$, т. е. доопределить неизвестные переменные через их допустимые предельные значения. Для рассматриваемого предельного случая $\Omega_M = \Omega_M(N, 0, N-q, q, N-q, q)$, $\Omega = \Omega(N, 0, N-q, q, N-q, q)$, т. е. множества (1.2), (1.3) полностью определяются только размерностями N, q векторов $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{U}$. При этом $M_{\min} = 1$, $M_{\max} = \lfloor (N-q)/q \rfloor + 1$.

2. Распознавание алфавита как задача проверки гипотез. Для каждого $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$ и $A \in \mathbf{A}$ определим множество

$$\Theta_M(A) = \{X \mid X = X(n_1, \ldots, n_M, U_1, \ldots, U_M, A), (n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M, U_m \in A, m \in \mathbf{M}\}$$

векторов $\mathbf{X}$, порождаемых M информационными векторами из алфавита A, множество $\Theta_M = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} \Theta_M(A)$ векторов $\mathbf{X}$, порождаемых информационными векторами из всех алфавитов при условии, что число M информационных фрагментов в последовательности компонент вектора $\mathbf{X}$ является фиксированным, а также множество $\Theta = \bigcup_{M = M_{\min}}^{M_{\max}} \Theta_M$ всех возможных (допустимых в задаче) векторов $\mathbf{X}$.

Из условий задачи следует, что $Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}$, где $X = X(n_1, \ldots, n_M, U_1, \ldots, U_M, A)$ – неизвестный параметр распределения, который (согласно принятой модели) однозначно определяется наборами $(n_1, \ldots, n_M)$, $(U_1, \ldots, U_M)$ и алфавитом A. Данный параметр принадлежит множеству Θ_M, если число M задано, или множеству Θ, когда число M неизвестно. Поэтому при известном числе M задача распознавания заключается в выборе гипотезы из совокупности

$$\{H_M(n_1, \ldots, n_M, U_1, \ldots, U_M, A) \mid (n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M,\ U_m \in A,\ m \in \mathbf{M}\}$$
$$= \{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}, X \in \Theta_M\}, \tag{2.1}$$

элементом которой является простая гипотеза

$$H_M(n_1, \ldots, n_M, U_1, \ldots, U_M, A) = \{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}, X = X(n_1, \ldots, n_M, U_1, \ldots, U_M, A)\}$$

о среднем $\mathbf{X}$ случайного вектора $\mathbf{Y}$. В случае если число M неизвестно, имеем более мощную совокупность гипотез

$$\{H(n_1, \ldots, n_M, U_1, \ldots, U_M, A) \mid (n_1, \ldots, n_M) \in \Omega, U_m \in A,\ m \in \mathbf{M}\} = \{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I},\ X \in \Theta\}, \tag{2.2}$$

элементом которой является гипотеза

$$H(n_1, \ldots, n_M, U_1, \ldots, U_M, A) = \{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}, X = X(n_1, \ldots, n_M, U_1, \ldots, U_M, A), M \in [M_{\min}, M_{\max}]\}.$$

Из выражений (1.3), (1.5) следует: 1) $|\Omega_M| = O[(N-q+1)(T_{\max}-T_{\min}+1)^M]$; 2) если $T_{\max}$, $T_{\min}$ и q фиксированны, то $M_{\max}$ и $M_{\min}$ – кусочно-постоянные возрастающие функции от N. Поэтому при $T_{\max} \neq T_{\min}$ мощности множеств Ω_M, Ω и совокупностей гипотез (2.1), (2.2), определяемых через эти множества, растут экспоненциально при увеличении как размерности N вектора $\mathbf{X}$, так и числа M фрагментов в последовательности компонент данного вектора. При этом $(U_1,\ldots,U_M) \in A^M$. Следовательно, простой перебор гипотез из указанных совокупностей не представляется возможным. Указанный экспоненциальный рост является ключевой проблемой реализации вычислений с целью выбора статистически значимой гипотезы.

3. Критерии решения задачи. Как и в работе [14], будем считать, что начальные номера информационных фрагментов, составляющие набор $(n_1,\ldots,n_M)$, а также элементы набора $(U_1,\ldots,U_M)$ и алфавит A являются неизвестными детерминированными величинами. Для решения проблемы используем критерий максимального правдоподобия. Рассматривая вектор $\mathbf{Y}$ в качестве выборки единичного объема из распределения $\Phi_{X,\sigma^2 I}$, найдем логарифм функционала правдоподобия:

$$L_Y(X(n_1,\ldots,n_M,U_1,\ldots,U_M,A),\sigma^2 I) =$$

$$= -\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\|Y - X(n_1,\ldots,n_M,U_1,\ldots,U_M,A)\|^2 . \qquad (3.1)$$

Из формулы (3.1) следует, что задача максимально правдоподобного распознавания сводится к минимизации функционала

$$S(X(n_1,\ldots,n_M,U_1,\ldots,U_M,A)) = \|Y - X(n_1,\ldots,n_M,U_1,\ldots,U_M,A)\|^2 \qquad (3.2)$$

суммы квадратов уклонений на множестве Θ допустимых векторов $\mathbf{X}(\cdot)$. В такой формулировке проблемы распознавания условие гауссовости помехи или ошибки наблюдения является лишним. Задачу распознавания можно трактовать как поиск наилучшего варианта среднеквадратического приближения.

4. Редуцированная экстремальная задача. Положим $Y_n = (y_n,\ldots,y_{n+q-1})$, $n = 0,\ldots,N-q$. Раскрывая квадрат нормы разности векторов (3.2) и используя соотношения (1.1), (1.3), находим

$$S(X(n_1,\ldots,n_M,U_1,\ldots,U_M,A)) = \|Y\|^2 - \sum_{m\in\mathbf{M}}\{2(Y_{n_m},U_m) - \|U_m\|^2\} . \qquad (4.1)$$

Первый член в правой части выражения (4.1) является константой. Следовательно, задача распознавания сводится к максимизации второго члена данного выражения. Имеем следующую редуцированную экстремальную задачу.

Задача 1 (распознавание алфавита векторов при неизвестном числе информационных фрагментов).

Дано*:* вектор $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^N$, целые числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, N^- и N^+ (как указано в п. **1**, в предельном случае задание этих чисел не требуется), совокупность $\mathbf{A} = \{A_1,\ldots,A_J\}$ конечных непересекающихся алфавитов информационных векторов из $\mathbb{R}^q$.

Найти*:* алфавит $A \in \mathbf{A}$, такой что

$$\sum_{m\in\mathbf{M}}\{2(Y_{n_m},U_m) - \|U_m\|^2\} \to \max , \qquad (4.2)$$

при ограничениях $(n_1,\ldots,n_M) \in \Omega_M(N,N^-,N^+,T_{\min},T_{\max},q)$, $(U_1,\ldots,U_M) \in A^M$, $M = |\mathbf{M}| \in [M_{\min},\ M_{\max}]$.

5. Алгоритм решения задачи распознавания. Определим функцию

$$d(n,U,A) = 2(Y_n,U) - \|U\|^2,\ n \in \{0,\ldots,N-q\}, U \in A,\ A \in \mathbf{A} . \qquad (5.1)$$

Целевую функцию (4.2) задачи 1 представим в виде

$$D(n_1,\dots,n_M,U_1,\dots,U_M,A)=\sum_{m\in\mathbf{M}} d(n_m,U_m,A),$$

$$(n_1,\dots,n_M)\in\Omega_M,\ (U_1,\dots,U_M)\in A,\ M\in[M_{\min},M_{\max}],\ A\in\mathbf{A}. \tag{5.2}$$

Положим

$$g(n,A)=\max_{U\in A} d(n,U\mid A),\ n\in\{0,\dots,N-q\},\ A\in\mathbf{A}; \tag{5.3}$$

$$G(n_1,\dots,n_M,A)=\sum_{m\in\mathbf{M}} g(n_m,A),\ (n_1,\dots,n_M)\in\Omega,\ A\in\mathbf{A}; \tag{5.4}$$

$$F(A)=\max_{(n_1,\dots,n_M)\in\Omega} G(n_1,\dots,n_M\mid A),\ A\in\mathbf{A}.$$

Структуру алгоритма решения задачи 1 раскрывает

Утверждение 1. *Пусть система ограничений, входящих в определение* (1.3), *совместна. Тогда:*

1) *имеем*

$$\max_{M,(n_1,\dots,n_M),(U_1,\dots,U_M),A} D(n_1,\dots,n_M,U_1,\dots,U_M,A)=\max_{A\in\mathbf{A}} F(A),$$

2) *значения аргументов, доставляющих максимум функции* (5.2), *находятся по правилу*

$$\hat{A}=\arg\max_{A\in\mathbf{A}} F(A),$$

$$\left\langle(\hat{n}_1(\hat{A}),\dots,\hat{n}_{\hat{M}}(\hat{A})),\hat{M}\right\rangle=\arg\max_{(n_1,\dots,n_M)\in\Omega} G(n_1,\dots,n_M\mid\hat{A}),$$

$$\hat{U}_m(\hat{A})=\arg\max_{U\in A} d(U\mid\hat{n}_m,\hat{A}),\ m\in\mathbf{M}.$$

Доказательство. Поскольку система ограничений, входящих в определение (1.3), совместна, имеет место неравенство (1.4), левая и правая части которого в соответствии с (1.5) определяют $M_{\max}$ и $M_{\min}$ – границы допустимых значений M. Следовательно, $\Omega_M\neq\varnothing$ при каждом $M\in[M_{\min},M_{\max}]$ и $\Omega\neq\varnothing$.

По условию задачи независимыми являются: 1) алфавиты в совокупности $\mathbf{A}$; 2) элементы набора $(U_1,\dots,U_M)$; 3) наборы $(n_1,\dots,n_M)$ и $(U_1,\dots,U_M)$ при каждом $M\in[M_{\min},M_{\max}]$. Поэтому имеем следующую цепочку равенств:

$$\max_{M,(n_1,\dots,n_M),(U_1,\dots,U_M),A} D(n_1,\dots,n_M,U_1,\dots,U_M,A)=$$

$$=\max_A\max_M\max_{(n_1,\dots,n_M)}\max_{(U_1,\dots,U_M)}\sum_{m\in\mathbf{M}} d(n_m,U_m\mid A)=\max_A\max_M\max_{(n_1,\dots,n_M)}\sum_{m\in\mathbf{M}}\max_{U_m\in A} d(U_m\mid n_m,A)=$$

$$=\max_A\max_M\max_{(n_1,\dots,n_M)}\sum_{m\in\mathbf{M}}\max_{U\in A} d(U\mid n_m,A)=\max_A\max_M\max_{(n_1,\dots,n_M)}\sum_{m\in\mathbf{M}} g(n_m\mid A)=$$

$$=\max_A\max_{(n_1,\dots,n_M)\in\Omega}\sum_{m\in\mathbf{M}} g(n_m\mid A)=\max_A\max_{(n_1,\dots,n_M)\in\Omega} G(n_1,\dots,n_M\mid A)=\max_A F(A).\ \square$$

Из данной цепочки равенств следует, что решение задачи 1 (распознавания алфавита) распадается на пошаговое решение задач условной оптимизации. На последнем шаге решение задачи 1 находится путем перебора значений $F(A)$ условных экстремумов целевой функции, найденных для каждого фиксированного $A\in\mathbf{A}$.

Положив $n=n_m$, $U=U_m$, заменим переменные в (5.1) и (5.3). Тогда нетрудно видеть, что вычисление значения $F(A)$ условного экстремума для каждого $A\in\mathbf{A}$ состоит в решении следующей задачи.

Задача 2 (обнаружение и идентификация информационных фрагментов как элементов алфавита).

Дано: вектор $\mathbf{Y}\in\mathbb{R}^N$, конечный алфавит $A\in\mathbf{A}$ информационных векторов из $\mathbb{R}^q$, целые числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, N^-, N^+ (в предельном случае задание этих чисел не требуется).

Найти: оптимальное значение M, набор $(n_1,\dots,n_M)\in\Omega$ и набор $(U_1,\dots,U_M)\in A^M$ такие, что целевая функция (4.2) задачи 1 максимальна при тех же ограничениях, что и в задаче 1.

Из утверждения 1 следует, что решение задачи 2 сводится к решению следующей задачи.

Задача 3 (максимизация функции (5.4)).

Дано: функция $g(n\,|\,A):\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, заданная своими значениями на множестве $\{0,\dots,N-q\}$, целые числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, N^-, N^+ (в предельном случае задание этих чисел не требуется).

Найти: оптимальное значение M и набор $(n_1,\dots,n_M)$, такие что

$$\sum_{m\in\mathbf{M}} g(n_m\,|\,A)\to\max,$$

при ограничениях $(n_1,\dots,n_M)\in\Omega_M$, $M=|\mathbf{M}|\in[M_{\min},M_{\max}]$.

Значения функции $g(n\,|\,A)$ вычисляются по формуле (5.3) путем прямого перебора значений функции (5.1), найденных для каждого $U\in A$. Точное решение задачи 3, т. е. максимизация целевой функции G, находится с помощью алгоритма, обоснованного в работе [17].

Для построения алгоритма решения задачи 1, используя результаты работы [16], для каждого $M\in[M_{\min},M_{\max}]$ определим пару множеств: множество

$$\omega_m(M)=\{n\,|\,n'_m(M)\le n\le n''_m(M)\},\ m=1,\dots,M,$$

где

$$n'_m(M)=\max\{(m-1)T_{\min},\,N^- -(M-m)T_{\max}\},$$

$$n''_m(M)=\min\{N^+ +(m-1)T_{\max},\,N-q-(M-m)T_{\min}\},$$

и множество

$$\gamma^-_{m-1}(n)=\{j\,|\,{}^-n_{m-1}(n)\le j\le {}^+n_{m-1}(n)\},\ n\in\omega_m(M),\ m=2,\dots,M,$$

где

$${}^-n_{m-1}(n)=\max\{(m-2)T_{\min},\,n-T_{\max}\},$$

$${}^+n_{m-1}(n)=\min\{N^+ +(m-2)T_{\max},\,n-T_{\min}\}.$$

Кроме того, следуя работе [17], определим множества

$$\omega^-=\bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}}\omega_1(M),\qquad \omega^+=\bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}}\omega_M(M),$$

$$\omega^1=\bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}}\bigcup_{m=2}^{M}\omega_m(M),\quad \omega=\bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}}\bigcup_{m=1}^{M}\omega_m(M),$$

$$\gamma(n)=\bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}}\bigcup_{m=2}^{M}\gamma^-_{m-1}(n),\ n\in\omega.$$

Справедлива следующая

Теорема 1 [17]. *Пусть система ограничений, входящих в определение* (1.3), *совместна. Тогда максимум* $G_{\max}$ *целевой функции* G *в задаче 3 определяется по следующим формулам:*

$$G_{\max}=\max_{n\in\omega^+}G(n),$$

$$G(n)=\begin{cases} g(n), & n\in\omega^-\setminus\omega^1,\\ \max\limits_{j\in\gamma(n)}G(j)+g(n), & n\in\omega^1\setminus\omega^-,\\ \max\{g(n),\max\limits_{j\in\gamma(n)}G(j)+g(n)\}, & n\in\omega^-\cap\omega^1.\end{cases}$$

Для каждого $n\in\omega$ определим функцию

$$I(n)=\begin{cases} -1, & n\in\omega^{-}\setminus\omega^{1},\\ \begin{cases} -1, & \max\limits_{j\in\gamma(n)} G(j)<0,\\ \arg\max\limits_{j\in\gamma(n)} G(j), & \max\limits_{j\in\gamma(n)} G(j)\ge 0,\end{cases} & n\in\omega^{-}\bigcap\omega^{1},\\ \arg\max\limits_{j\in\gamma(n)} G(j), & n\in\omega^{1}\setminus\omega^{-}.\end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 1 [17]. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Допустим, что целочисленная последовательность определяется по правилу* $\mu_1=\arg\max\limits_{n\in\omega^{+}} G(n)$, $\mu_m=I(\mu_{m-1})$, $m=2,\ldots,r$, *где* r *– решение неравенства* $I(\mu_r)<0$. *Тогда для числа* $\hat{M}$ *компонент оптимального набора* $(\hat{n}_1,\ldots,\hat{n}_{\hat{M}})$ *справедливо равенство* $\hat{M}=r$, *а компоненты этого набора находятся по формуле*

$$\hat{n}_m=\mu_{\hat{M}-m+1},\quad m=1,\ldots,\hat{M}.$$

Представим алгоритм решения задачи 1 в виде следующей пошаговой процедуры.

Шаг 1 (анализ корректности входных данных). Проверка справедливости условия (1.4). Если это условие не выполнено, то входные данные заданы некорректно и последующие шаги не производятся.

Шаг 2 (распознавание алфавита). Начало процедуры решения задачи 1. $F:=-\infty$.

М1: чтение очередного $A\in\mathbf{A}$.

Шаг 3 (обнаружение и идентификация информационных фрагментов). Начало процедуры решения задачи 2.

Шаг 4 (условная идентификация информационных фрагментов). Начало процедуры вычисления значений функции $g(n\mid A)$. Для каждого $n\in\{0,\ldots,N-q\}$ выполняем $g:=-\infty$.

М2: считывание очередного $U\in A$.

1) Вычисление значения функции $d(n,U\mid A)$ по формуле (5.1).

Если $g<d(n,U\mid A)$, **то** $\{g:=d(n,U\mid A), U_n:=U\}$.

2) **Если** остались несчитанные элементы из A,

то переход на М2, **иначе** $g(n\mid A):=g$.

Конец процедуры вычисления функции $g(n\mid A)$.

Шаг 5 (обнаружение информационных фрагментов). Начало процедуры решения задачи 3.

1) Вычисление последовательности значений $G_m(n)$ условных максимумов и значения $G_{\max}$ глобального максимума функции G по формулам теоремы 1.

2) Вычисление компонент n_m, $m=1,\ldots,\hat{M}$, оптимального набора, а также их числа $\hat{M}$ по формулам следствия 1.

Конец процедуры решения задачи 3.

Конец процедуры решения задачи 2.

Если $F<G_{\max}$,

то $\{F:=G_{\max}, \hat{A}:=A, \hat{U}_m(\hat{A}):=U_{n_m}, \hat{M}(\hat{A}):=\hat{M}, \hat{n}_m(\hat{A}):=n_m, m=1,\ldots,\hat{M}\}$.

Если остались необработанные алфавиты из $\mathbf{A}$, **то** переход на М1.

Конец процедуры решения задачи 1.

В данной пошаговой записи шаг 5 соответствует алгоритму решения задачи 3, шаги 3, 4, 5 – алгоритму решения задачи 2, а шаги 2, 3, 4, 5 – алгоритму решения задачи 1. Выходом алгоритма являются оптимальные значения: $\hat{A}$, $F=F(\hat{A})$, $\hat{M}(\hat{A})$, $\hat{U}_m(\hat{A})$, $\hat{n}_m(\hat{A})$, $m=1,\ldots,\hat{M}(\hat{A})$.

Замечание 1. В случае если значения $\hat{M}(\hat{A})$, $\hat{U}_m(\hat{A})$, $\hat{n}_m(\hat{A})$ $(m=1,\ldots,\hat{M}(\hat{A}))$ числа и компонент оптимальных наборов вычислять не требуется (достаточно определить лишь алфавит), часть операций в пошаговой записи алгоритма можно не выполнять. В этом случае следует исключить операции присвоения для соответствующих переменных в четвертой строке от конца пошаговой записи. На шаге 5 исключению подлежит п. 2. Кроме того, можно не выполнять присвоение $U_n := U$ в п. 2 шага 4.

Таким образом, описанный алгоритм позволяет находить точное решение задачи 1. Это означает (в соответствии с п. 3 и п. 4), что алгоритм обеспечивает оптимальность решения задачи распознавания алфавита как по критерию минимума функционала суммы квадратов уклонений (3.2), так и по критерию максимума функционала правдоподобия (3.1), в случае если помеха аддитивна и является гауссовой последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Поэтому теоретические оценки точности алгоритма в смысле вероятности ошибки распознавания (или верхней и нижней границ вероятности ошибки) могут быть получены с использованием классических статистических методов.

6. Оценки временной сложности. Для анализа временной сложности алгоритмов используем пошаговую запись, приведенную в п. **5**, и результаты работы [17].

Следствие 2. *В случае если числа* $T_{\min}$, $T_{\max}$, N^-, N^+ *заданы как входные данные, временная сложность алгоритма решения задачи* 1 *есть величина* $O[(T_{\max}-T_{\min}+Kq)(N-q+1)]$. *В предельном (общем) случае, когда числа* $T_{\min}$, $T_{\max}$, N^-, N^+ *неизвестны, сложность алгоритма решения задачи* 1 *есть величина* $O(KN^2)$.

Доказательство. На шаге 1 число операций равно константе, не зависящей от размера входа задачи.

Рассмотрим случай, когда числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, N^-, N^+ являются входом задачи. Согласно работе [17] временная сложность алгоритма решения задачи 3 есть величина $O[(T_{\max}-T_{\min}+1)(N-q+1)]$. Эта задача решается на шаге 5.

Задача 2 решается на шагах 3, 4, 5. Шаг 3 обозначает начало процедуры. На шаге 4 для вычисления значений функции $g(n\,|\,A)$ на множестве $\{0,\ldots,N-q\}$ потребуется $O[|A|q(N-q+1)]$ операций, так как мощность алфавита информационных векторов размерности q равна $|A|$. Суммируя эти затраты с затратами на решение задачи 3, получаем трудоемкость алгоритма решения задачи 2: $O[(T_{\max}-T_{\min}+|A|q)(N-q+1)]$.

По условию задачи имеем J непересекающихся алфавитов, мощности которых равны $K_1,\ldots,K_J$, причем суммарная мощность всех алфавитов равна K. Поэтому для временной сложности алгоритма решения задачи 1 получаем следующую оценку:

$$O[\sum_{j=1}^{J}\{K_j(T_{\max}-T_{\min}+1)(N-q+1)+K_j q(N-q+1)\}]=O[(T_{\max}-T_{\min}+Kq)(N-q+1)].$$

Положив $T_{\max}=N-q$, $T_{\min}=q$, как это установлено в п. **1**, из данного выражения находим оценки временной сложности алгоритма для общего случая. □

Следует отметить, что алгоритм решения рассматриваемой задачи, предложенный в работе [14], имеет трудоемкость $O[M_{\max}(M_{\max}-M_{\min}+1)(T_{\max}-T_{\min}+Kq)(N-q+1)]$, в случае если числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, N^-, N^+ заданы как входные данные, и трудоемкость $O(M_{\max}^2 KN^2)$, в случае если эти числа неизвестны. Следствие 2 показывает, что алгоритм, предложенный в данной работе, имеет трудоемкость в $M_{\max}^2$ раз меньше.

Заключение. Рассмотренная задача является еще одним эффективным алгоритмом (см. [18 – 22]) решения задач дискретной оптимизации, к которым сводится помехоустойчивая off-line-обработка (анализ и распознавание) числовых последовательностей, включающих какие-либо структуры над информационнозначимыми вектор-фрагментами одинаковой размерности. Предложен новый, более эффективный по сравнению с известным алгоритм решения экстремальной задачи, к которой сводится максимально правдоподобное off-line-распознавание алфавита векторов, порождающего числовые последовательности, включающие квазипериодически перемежающиеся вектор-фрагменты, в случае если помеха аддитивна и является гауссовой последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, а число информационных вектор-фрагментов в последовательности неизвестно. Предложенный алгоритм является ядром соответствующего помехоустойчивого алгоритма распознавания. Демонстрационную версию программы, реализующей этот алгоритм, можно найти в Интернете на сайте http://math.nsc.ru/~serge/qpsl.

Открытыми остаются вопросы о разрешимости аналогов рассмотренной экстремальной задачи для случая, когда модель последовательности включает посторонние (мешающие) произвольные, но ненулевые фрагменты-вставки. Не изучен также имеющий большое значение вариант задачи распознавания алфавита информационных векторов, когда алфавиты из совокупности перекрываются. Алгоритмы решения данных задач представляют значительный интерес, и их обоснование является делом ближайшей перспективы.

Список литературы

1. Кельманов А.В., Хамидуллин С. А. Об одном варианте задачи распознавания алфавита векторов // Тез. докл. междунар. конф. "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвящ. 100-летию со дня рожд. В. К. Иванова, Екатеринбург, 1–6 сент. 2008 г. Екатеринбург: Урал. гос. ун-т, 2008. С. 282–283.
2. Kel'manov A. V., Jeon B. A posteriori joint detection and discrimination of pulses in a quasiperiodic pulse train // IEEE Trans. on Signal Proc. 2004. V. 52, N 3. P. 1–12.
3. Wald A. Sequential analysis. N. Y.: John Wiley, 1947.
4. Клигене Н., Телькснис Л. Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 10. С. 5–56.
5. Торговицкий И. Ш. Методы определения момента изменения вероятностных характеристик случайных величин // Зарубеж. радиоэлектрон. 1976. № 1. С. 3–52.
6. Никифоров И. В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. М.: Наука, 1983.
7. Жиглявский А. А. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники / А. А.Жиглявский, А. Е. Красковский. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1988.
8. Бассвиль М. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / М. Бассвиль, А. Вилски, А. Банвенист и др. М.: Мир, 1989.
9. Van Trees H. L. Detection, estimation, and modulation theory. Pt. 1, N. Y.: John Wiley and Sons Inc., 1968.
10. Helstrom C. W. Elements of signal detection and estimation, Englewood cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, 1979.
11. Anderson B. D. Optimal filtering, Englewood cliffs / B. D. Anderson, J. D. Moore. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.
12. Duda R. O. Pattern classification and scene analysis / R. O. Duda, P. E. Hart. N. Y.: John Wiley and Sons Inc., 1973.
13. Fukunaga K. Introduction to statistical pattern recognition. 2nd ed. N. Y.: Acad. Press, 1990.
14. Кельманов А. В., Хамидуллин С. А. Об одном варианте задачи распознавания алфавита векторов, порождающего последовательности с квазипериодической структурой // Тр. 14-й Байкал. междунар. шк.-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, 2–8 июля 2008 г. Иркутск: Ин-т систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, 2008. Т. 1. С. 421–427.
15. Кельманов А. В., Михайлова Л. В. Совместное обнаружение в квазипериодической последовательности заданного числа фрагментов из эталонного набора и ее разбиение на участки, включающие серии одинаковых фрагментов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 1. С. 172–189.
16. Кельманов А. В., Хамидуллин С. А. Апостериорное обнаружение заданного числа одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 5. С. 807–820.
17. Кельманов А. В., Окольнишникова Л. В. Апостериорное совместное обнаружение и различение подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Сиб. журн. индустр. математики. 2000. Т. 3, № 2. С. 115–139.
18. Кельманов А. В. О некоторых полиномиально разрешимых и NP-трудных задачах анализа и распознавания последовательностей с квазипериодической структурой // Докл. 13-й Всерос. конф. "Математические методы распознавания образов". Зеленогорск, 30 сент. – 6 окт. 2007 г. М.: МАКС Пресс, 2007. С. 261–264.
19. Кельманов А. В. Полиномиально разрешимые и NP-трудные варианты задачи оптимального обнаружения в числовой последовательности повторяющегося фрагмента // Материалы Рос. конф. "Дискретная оптимизация и исследование операций". Владивосток, 7–14 сент. 2007 г. [Электрон. ресурс] Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2007. http://math nsc ru/conference/door07 /DOOR_abstracts.pdf.

20. KEL'MANOV A. V. Discrete optimization problem in a connection with the off-line noiseproof detection of a repeating fragment in a numerical sequence // Proc. of the 9th Intern. conf. "Pattern recognition and image analysis: new information technologies". Nizhni Novgorod: S. n., 2008. V. 1. P. 273–275.

21. KEL'MANOV A. V., MIKHAILOVA L. V., KHAMIDULLIN S. A. QPSLab system for analysis and recognition of signals with a quasiperiodic structure // Proc. of the 9th Intern. conf. "Pattern recognition and image analysis: new information technologies". Nizhni Novgorod: S. n., 2008. V. 1. P. 412–418.

Александр Васильевич Кельманов – д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН; e-mail: kelm@math.nsc ru; тел. (383) 363-46-79