

## Циклы непротиворечивых подсистем в приложении к историко-экономической динамике

В. Д. Мазуров, М. Ю. Хачай

Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Екатеринбург, Россия

Исследуется подход к описанию неравновесных ситуаций, в частности исторических и экономических, с точки зрения циклов максимальных по включению совместных подсистем подходящих систем ограничений, неравенств или уравнений. Показана взаимосвязь условий существования простых циклов в графах максимальных совместных подсистем и комитетных обобщенных решений таких систем. Изучается структура графов максимальных совместных подсистем так называемых равномерно распределенных (по Гейлу) систем неравенств, представляющих особый интерес в классе линейных систем ограничений.

**Ключевые слова:** противоречивые системы ограничений, обобщенные решения, максимальные совместные подсистемы.

In this paper an approach to definition of unstable situations, particularly of history and economics, is discovered from the point of view of cycles of the maximal (by the inclusion) feasible subsystems of the appropriate systems of constraints. The relation between the existence conditions for simple cycles in graphs of maximal feasible subsystems and for committee generalized solutions of such systems is pointed out. In the class of systems of linear constraints the uniform (by Gale) distributed inequalities systems involve a special interest. In this paper a structure of the maximal feasible subsystems graphs for such systems is discovered.

**Key words:** infeasible systems of constraints, generalized solutions, maximal feasible subsystem.

**Введение.** Фундаментальное понятие равновесия пришло в экономику (как и в другие науки) из механики. Одним из видов обобщенных равновесий являются циклы, одним из видов циклов – циклы совместных подсистем (понятие введено авторами).

Главная причина циклов – отсутствие "рога изобилия" (одна из основных аксиом математической экономики, которая означает, что коэффициент полезного действия меньше единицы). Можно сказать, что все всегда живут в стесненных обстоятельствах. Распоряжаться слишком ограниченными ресурсами – значит решать несовместные системы уравнений и неравенств. Решать – значит находить решения максимальных совместных подсистем (МСП) подходящих систем ограничений и потом циклически их реализовывать.

Равновесные циклы максимальных совместных подсистем в модели Вальраса можно использовать, когда система нелинейных уравнений в этой модели несовместна. В более общей модели вместо уравнений используем неравенства. Тогда также нужно использовать МСП системы ограничений. В модели Леонтьева рассматриваются графы продуктивных матриц и матриц косвенных затрат. Более общий подход – использование графов МСП.

Имеются закономерности образования циклов при эволюции систем. Внешне циклы могут описываться, например, дифференциальными уравнениями. Однако при этом не вскрываются фундаментальные причины циклического поведения сложных систем. Одна из причин появления циклов – противоречивые условия, при которых система может находиться в одном из классов состояний, соответствующих непротиворечивым подсистемам условий. Имеется динамика циклического перебора решений максимальных совместных подсистем исходной системы условий. Другая причина – неустойчивость, когда, казалось бы, при одних и тех же условиях система ведет себя иначе. Такого рода явления известны в экономике, химии, биологии. Циклы решений тупиковых подсистем наблюдаются также при неоднозначной интерпретации [1] противоречивых данных, например изображений.

Когда некоторая система, работающая в определенном режиме, накапливает энтропию, она должна перейти к другому режиму, чтобы предотвратить саморазрушение. В случае изолированной системы состояние равновесия соответствует максимуму ее энтропии. Энтропия – мера хаоса. Однако равновесие подвижно. Для моделирования данной ситуации можно использовать формулировку задачи выполнения ограничений. Поскольку эта задача, как правило, несовместна, будем использовать максимальные совместные подсистемы. От состояния, соответствующего данной МСП, перейдем к соседней МСП. При этом опираемся на доказанный ранее факт, что граф МСП системы линейных неравенств связан.

Противоречивость системы условий объясняет цикличность многих процессов, в том числе социальных. Циклическое равновесие – обобщение классического статического равновесия.

Противоречивость соотношений математической модели, даже относящейся к одному моменту, ведет от статичности к процессуальности, к динамике. В частности, несовместность ведет к цикличности. Логика разрешения противоречий динамизирует объекты и ситуации. Противоречия порождают развитие. Существуют закономерности образования циклов при эволюции систем. Внешне циклы могут описываться, например, дифференциальными уравнениями. Но при этом не вскрываются фундаментальные причины циклического поведения сложных систем. Одна из причин циклов – противоречивые условия, при которых система может находиться в одном из классов состояний, отвечающих непротиворечивым подсистемам условий. Такого сорта явления известны в экономике, химии, биологии. При этом в биологии динамика, обусловленная противоречивостью, использует обратную связь: попав в очередную МСП, система определяет тот момент, когда надо переходить к другой МСП. Явление максимальных совместных подсистем возникает ввиду противоречивого наложения друг на друга, например биоритмов человека и ритмов среды.

В качестве еще одного примера можно рассмотреть динамику региона в условиях циклического развития экономических процессов. Динамические ряды состояний характеризуются более длительными циклами на фоне флуктуаций, порождаемых структурными межотраслевыми взаимосвязями. Многие циклы, например суточные циклы организма, обусловлены несовместимостью всех целей, если их свести воедино: например, надо и действовать, и сохранять энергию, и предаваться созерцанию и размышлениям.

Циклическое равновесие, обобщение классического равновесия тесно связано с понятием комитетного решения, являющегося, в свою очередь, дискретным обобщением понятия решения системы ограничений на случай несовместности последней. Фактически комитетным решением является конечный набор элементов пространства, над которым задана система, такой что каждому ограничению удовлетворяет большинство элементов набора. При этом каждый отдельный элемент не обязан разрешать систему в целом.

**Графы максимальных совместных подсистем и комитетные обобщенные решения.** Пусть заданы множество  $X$  и набор его непустых подмножеств  $D_1, \dots, D_m$ . Рассмотрим систему включений

$$x \in D_j \quad (j \in \mathbb{N}_m = \{1, \dots, m\}). \quad (1)$$

Система (1) называется несовместной, если  $\bigcap_{j=1}^m D_j = \emptyset$ . Ряд утверждений, приведенных ниже, справедлив для произвольной системы (1), однако большая часть результатов сформулирована для ее частного случая – системы неравенств

$$f_j(x) > 0 \quad (j \in \mathbb{N}_m).$$

Здесь дополнительно предполагается, что  $X$  является вещественным линейным пространством

$$f_1, \dots, f_m \in F \subset \{X \rightarrow \mathbb{R}\},$$

где  $F$  – заданный класс функций (линейных, аффинных и т. п.).

Систему

$$x \in D_j \quad (j \in J)$$

для произвольного подмножества  $J \subseteq \mathbb{N}_m$  будем называть подсистемой системы (1) с индексным множеством (индексом)  $L$  и обозначать  $(1)_L$ , множество ее решений обозначим через  $D(L) = \bigcap_{j \in J} D_j$ . Подсистему  $(1)_L$ , индекс  $L$  которой является собственным подмножеством  $\mathbb{N}_m$ , также будем называть собственной.

**Определение 1.** Подсистема  $(1)_L$  называется максимальной совместной подсистемой (МСП) системы (1), если  $D(L) \neq \emptyset$  и  $D(L \cup \{j\}) = \emptyset$  для каждого  $j \notin L$ .

Видно, что система (1) либо совместна, либо имеет собственные МСП. Перейдем к определениям комитетных конструкций.

**Определение 2.** Комитетным обобщенным решением (комитетом) системы (1) называется конечная последовательность  $Q = (x^1, \dots, x^q)$ ,  $x^i \in X$ , такая что  $|\{i : x^i \in D_j\}| > q/2$  для каждого  $j \in \mathbb{N}_m$ .

Нетрудно убедиться, что при поиске комитетных решений системы (1) достаточно ограничиться рассмотрением комитетов, составленных из решений ее максимальных совместных подсистем.

Структуру множества МСП и условия существования комитетных решений несовместной системы ограниченных удобно формулировать в терминах графов (гиперграфов) ее максимальных совместных или минимальных несовместных подсистем. Понятие графа МСП введено в работе [2] для системы строгих однородных линейных неравенств. Свойства этого графа подробно изучены в работах [3, 4], в работе [3] некоторые из них обобщены на случай более общей системы включений.

**Определение 3.** Графом максимальных совместных подсистем системы ограничений (1) называется конечный граф  $G = (V, E)$ , множество вершин которого совпадает с множеством  $\{J_1, \dots, J_T\}$  индексов максимальных совместных подсистем системы и  $\{J_i, J_j\} \in E$  тогда и только тогда, когда  $J_i \cup J_j = \mathbb{N}_m$ .

Пусть далее  $G = (V, E)$  – произвольный граф. Как известно, степенью его вершины  $v$  называется число ребер, инцидентных  $v$ , т. е. число  $|\{e \in E : v \in e\}|$ .

Чередующаяся последовательность

$$v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \dots, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l,$$

где  $v_j \in V$ ,  $\{v_j, v_{j-1}\} \in E$  называется  $(v_1, v_l)$ -маршрутом. Число ребер маршрута называется его длиной. Часто маршрут задается последовательностью входящих в него вершин. Маршрут называется цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все его вершины, кроме, может быть, крайних, различны. Маршрут называется циклическим, если  $v_1 = v_l$ . Циклическая цепь называется циклом, а простая – простым циклом. Граф  $G$  называется связным, если для любых вершин  $v_i \neq v_j$  существует  $(v_i, v_j)$ -маршрут.

Связность графа МСП несовместной системы включений тесно достаточна для наличия (у этой системы) комитетных решений. Справедливо, например, следующее непосредственно проверяемое

**Утверждение 1.** Пусть  $J_1, J_2, \dots, J_{2s-1}, J_1$  – цикл в графе МСП системы (1) и  $x^i \in D(J_i)$ . Последовательность  $(x^1, x^2, \dots, x^{2s-1})$  – комитетное решение системы (1).

Пусть далее  $X$  – топологическое пространство, в котором заданы упорядоченные пары множеств  $(A_1, A'_1), \dots, (A_m, A'_m)$ . Определим множества  $D_1, \dots, D_m \subset X \times \{0, 1\}$  следующим образом:

$$D_j = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} : x \in A_j \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in A'_j \right\}$$

и рассмотрим систему включений

$$y = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} \in D_j \quad (j \in \mathbb{N}_m). \quad (2)$$

Видно, что произвольная подсистема (2) с индексом  $\emptyset \neq L \subseteq \mathbb{N}_m$  совместна (т. е.  $D(L) = \bigcap_{j \in L} D_j \neq \emptyset$ ) тогда и только тогда, когда  $\bigcap_{j \in L} A_j \cup \bigcap_{j \in L} A'_j \neq \emptyset$ . Справедлива

**Теорема 1 ([4]).** Пусть множества  $A_j, A'_j$  открыты в  $X$ ,  $A_j \cap A'_j = \emptyset$  и  $F_j = X \setminus (A_j \cup A'_j)$  нигде не плотны в  $X$  для всех  $j \in \mathbb{N}_m$ . Если множество

$$X \setminus \left( \bigcup_{i \neq j} F_i \cap F_j \right) \quad (3)$$

связно, то граф МСП системы (2) также связан.

Следствием теоремы 1 является теорема о связности графа МСП системы линейных однородных неравенств

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) > 0, \quad (j \in \mathbb{N}_m), \quad (4)$$

где  $\mathbf{a}_j \in S_{n-1} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{a}| = 1\}$  и  $\mathbf{a}_i \pm \mathbf{a}_j \neq 0$  для произвольного  $\{i, j\} \subset \mathbb{N}_m$ . Убедимся в этом, проведя рассуждения согласно [3]. Сопоставим системе (4) подходящую систему (2), для чего положим

$$A_j = \{\mathbf{x} : (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) > 0\}, \quad A'_j = \{\mathbf{x} : (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) < 0\}.$$

Легко видеть, что произвольное непустое подмножество  $L \subseteq \mathbb{N}_m$  является индексом совместной подсистемы системы (4) тогда и только тогда, когда  $D(L) \neq \emptyset$ , поэтому множества (и графы) МСП системы (4) и поставленной ей в соответствие системы (2) совпадают. Множества  $F_j$  как гиперплоскости нигде не плотны в  $X = \mathbb{R}^n$ , и множество (3) связно. Следовательно, по теореме 1 граф МСП системы (2) связан, значит, связан и граф МСП системы (4). Приведем еще несколько результатов, полученных в работе [3].

**Теорема 2.** Пусть для заданного  $k \in \mathbb{N}_{n-1}$  каждая подсистема из  $k+1$  неравенства системы (4) совместна. Тогда степень каждой вершины ее графа МСП не меньше  $k+1$ .

**Теорема 3.** Граф изоморфен графу МСП подходящей системы (4), заданной в  $\mathbb{R}^2$ , тогда и только тогда, когда он является циклом длины  $q$  для некоторого нечетного  $1 \leq q \leq m$ .

В  $\mathbb{R}^n$  близкий результат формулируется следующим образом.

**Теорема 4.** Всякое ребро графа МСП системы (4), заданной в  $\mathbb{R}^n$  при  $n \geq 2$ , принадлежит простому циклу длины, не превосходящей  $m$ .

Теоремы 1 и 2 позволяют находить МСП системы неравенств (4), строя маршруты в графе ее МСП. Например, известно [2], что если  $J_1$  – индекс МСП несовместной системы (4), то найдется МСП той же системы с индексом  $J_2$ , таким что  $J_2 \supseteq \mathbb{N}_m \setminus J_1$ .

Теорема 4 позволяет с иной стороны посмотреть на вопрос существования комитета для системы линейных однородных неравенств. Согласно утверждению 1 наличие цикла  $J_1, J_2, \dots, J_{2s-1}, J_1$  в графе МСП системы включений (1) (в частности, системы (4)) достаточно для наличия у нее комитетного обобщенного решения, состоящего из решений соответствующих МСП, взятых для каждой по одному. Согласно теореме 4 в случае системы однородных линейных неравенств условия существования комитетного решения и цикла нечетной длины (в графе ее МСП) эквивалентны.

**Равномерно распределенные системы неравенств.** Рассмотрим один частный случай системы линейных однородных неравенств (4) – случай равномерно распределенной (по Гейлу) системы неравенств. Изучение класса таких систем представляет интерес, во-первых, потому, что такие системы в некотором смысле "максимально противоречивы", во-вторых, потому, что вследствие регулярности строения их графов МСП – задачи исследования таких систем, например поиска комитетных решений с наименьшим числом элементов, имеют красивые и простые алгоритмы решения.

Зафиксируем конкретную систему вида (4) и сопоставим произвольному элементу  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  множества

$$J_>(\mathbf{x}) = \{j : (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) > 0\},$$

$$J_<(\mathbf{x}) = \{j : (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) < 0\},$$

$$J_=(\mathbf{x}) = \{j : (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) = 0\}.$$

**Определение 4.** Система линейных неравенств (4) называется равномерно распределенной (по Гейлу), если  $m = 2k + n - 1$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$  и для каждого  $0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  справедливо условие  $|J_>(\mathbf{x})| \geq k$ .

Обозначим через  $UD(n, k)$  класс всех равномерно распределенных систем, заданных в  $\mathbb{R}^n$  и состоящих из  $2k + n - 1$  неравенств. Ответ на вопрос о непустоте классов  $UD(n, k)$  позволяет получить следующая теорема.

**Теорема 5 [5].** Для произвольных натуральных  $n > 1$  и  $k$  существует равномерно распределенная система (4) с  $m = 2k + n - 1$  неравенствами.

**Критерий равномерной распределенности системы неравенств.** Рассмотрим условие, налагаемое на систему неравенств, необходимое и достаточное для равномерной распределенности данной системы. Для полноты изложения приведем соответствующую теорему с доказательством. Далее всюду (если не оговорено противное) для системы (4) будем полагать выполненными условия

$$n > 1, \quad m = 2k + n - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для произвольного подмножества  $K \subseteq \mathbb{N}_m$  введем следующие обозначения. Через  $\text{Lin}(K) = \langle \mathbf{a}_j : j \in K \rangle$  обозначим линейное подпространство, индуцированное множеством

$$\{\mathbf{a}_j : j \in K\}, \quad (5)$$

т. е. линейное подпространство минимальной размерности, содержащее множество (5). Аналогично через  $C(K)$  обозначим выпуклый замкнутый полиэдральный конус, индуцированный множеством (5).

**Теорема 6 [6].** Система неравенств (4) равномерно распределена по Гейлу тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

- 1) каждые  $n$  векторов из  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  линейно независимы;
- 2) если  $L$  – индекс МСП системы (4), то  $|L| = n + k + 1$ .

**Доказательство.** Достаточность. Пусть, от противного, система (4) не является равномерно распределенной, т. е. найдется вектор  $\mathbf{x}^0 \neq 0$ , такой что  $J_>(\mathbf{x}) < k$ . Тогда  $|J_>(-\mathbf{x}^0) \cup J_<(-\mathbf{x}^0)| > k + n - 1$ . Из условия 1) вытекает, что  $|J_<(-\mathbf{x}^0)| < n$  и, следовательно, подсистема системы (4) с индексом  $J_<(-\mathbf{x}^0)$  совместна. Обозначим через  $\mathbf{x}^1$  ее произвольное решение. Рассмотрим вектор  $\bar{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0$ , получаем (при достаточно малом  $\varepsilon > 0$ )  $|J_>(\bar{\mathbf{x}})| > k + n - 1$ , что противоречит условию 2). Следовательно, предположение ложно и система (4) равномерно распределена.

Необходимость. Пусть система (4) равномерно распределена, убедимся в справедливости условий теоремы. Пусть, от противного, условие 1) не выполнено. Без ограничения общности будем полагать, что векторы  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  линейно зависимы. Тогда найдется нетривиальное решение  $\mathbf{x}^0 \neq 0$  системы

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) = 0 \quad (j \in \mathbb{N}_n).$$

Однако по условию  $m = 2k + n - 1$ , следовательно, либо  $|J_>(\mathbf{x}^0)| < k$ , либо  $|J_>(-\mathbf{x}^0)| < k$ , что противоречит равномерной распределенности системы. Значит, условие 1) с необходимостью выполнено.

Пусть далее  $L$  – индекс произвольной МСП системы (4). Справедлива двусторонняя оценка  $n \leq |L| \leq n + k - 1$ . Действительно, нижняя оценка непосредственно следует из условия 1). Для обоснования верхней оценки рассмотрим произвольное решение  $\mathbf{x}^0$  подсистемы с индексом  $L$ . Очевидно, что  $J_>(\mathbf{x}^0) = L$  и  $J_<(\mathbf{x}^0) = \emptyset$  в силу максимальности  $L$ . Поэтому с учетом определения равномерной распределенности имеем

$$k \leq |J_>(-\mathbf{x}^0)| = |J_<(\mathbf{x}^0)| = m - |L| - 0 = 2k + n - 1 - |L|,$$

следовательно,  $|L| \leq k + n - 1$ .

Убедимся в справедливости противоположного неравенства. Рассмотрим конус

$$C(L) = \text{cone}\{\mathbf{a}_j : j \in L\}.$$

Из сказанного выше следует, что конус  $C(L)$  телесен. Кроме того, справедливо неравенство  $C(L) \neq \mathbb{R}^n$ , поскольку  $L$  – индекс совместной подсистемы. Следовательно, конус  $C(L)$  обладает фасетами. Не ограничивая общности, положим, что одна из фасет  $C(L)$  имеет вид  $F = \text{cone}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ . Тогда гиперплоскость

$$H = \text{Lin}(\mathbb{N}_{n-1}) = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \rangle$$

является опорной к конусу  $C(L)$ , и найдется вектор  $0 \neq \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n$ , такой что

$$H = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{w}, \mathbf{x}^1) = 0\},$$

$$C(L) \subset \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{w}, \mathbf{x}^1) \geq 0\}.$$

Следовательно,

$$L \setminus \mathbb{N}_{n-1} \subseteq J_{>}(\mathbf{x}^1).$$

Рассмотрим произвольное решение  $\mathbf{x}^2$  (очевидно) совместной подсистемы

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) > 0 \quad (j \in \mathbb{N}_{n-1}).$$

По аналогии с доказательством достаточности убедимся в том, что вектор  $\mathbf{x}^1 + \varepsilon \mathbf{x}^2$  при достаточно малом  $\varepsilon$  является решением подсистемы индексом  $J_{>}(\mathbf{x}^1) \cup J_{\leq}(\mathbf{x}^1)$  (системы (4)). Согласно доказанному выше  $L \subseteq J_{>}(\mathbf{x}^1) \cup J_{\leq}(\mathbf{x}^1)$ , следовательно,

$$L = J_{>}(\mathbf{x}^1) \cup J_{\leq}(\mathbf{x}^1)$$

в силу максимальности  $L$ . Далее по условию  $|J_{>}(\mathbf{x}^1)| \geq k$ , значит,

$$|L| \geq k + n - 1.$$

Теорема доказана.

Равномерно распределенные системы неравенств в  $\mathbb{R}^2$  обладают достаточно простой структурой. Такая произвольная система состоит из  $2k+1$  неравенств и обладает графом МСП  $G = (V, E)$ , изоморфным простому циклу длины  $2k+1$ , каждая вершина которого является индексным множеством мощности  $2k+1$ .

Уже в трехмерном пространстве равномерно распределенные системы с комбинаторной точки зрения гораздо более разнообразны. Приведем бесконечную серию примеров равномерно распределенных систем неравенств в  $\mathbb{R}^3$ . По определению каждая такая система состоит из  $2k+2$  неравенств (для заданного натурального  $k$ ).

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} (\mathbf{a}'_i, \mathbf{x}) > 0, & |\mathbf{a}'_i| = 1, \quad (i \in \mathbb{N}_{k+1}), \\ (\mathbf{a}''_j, \mathbf{x}) > 0, & |\mathbf{a}''_j| = 1, \quad (j \in \mathbb{N}_{k+1}), \end{cases} \quad (6)$$

векторы  $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_{k+1}, \mathbf{a}''_1, \dots, \mathbf{a}''_{k+1}$  левых частей неравенств которой задаются соотношениями

$$\mathbf{a}'_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{k+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi(i-1)}{k+1}\right) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}''_j = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi(2j+k)}{k+1}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi(2j+k)}{k+1}\right) \\ -1 \end{bmatrix}.$$

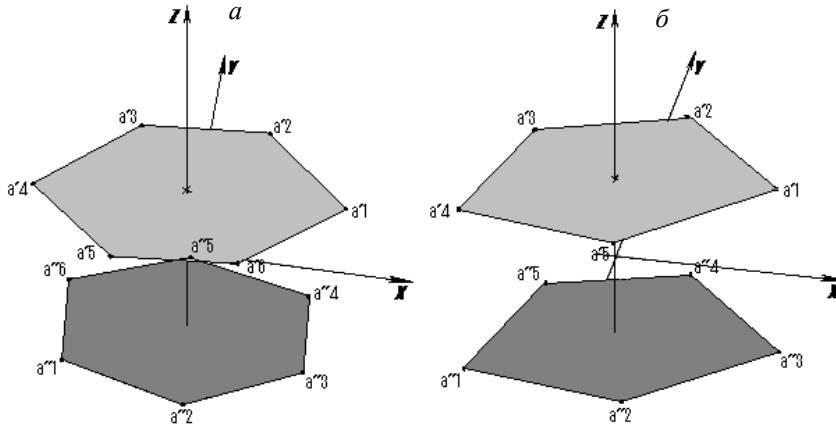


Рис. 1. Примеры равномерно распределенных систем неравенств при  $k=5$  (а) и  $k=4$  (б)

На рис. 1 видно, что концы векторов  $\mathbf{a}'_i$  и  $\mathbf{a}''_j$  являются вершинами правильных  $(k+1)$ -угольников (при  $k=1$  вырождающихся в отрезки), расположенных в горизонтальных плоскостях на расстоянии  $\sqrt{2}$  друг от друга, вписанных в единичную сферу  $S_2$  сопряженного пространства и развернутых друг относительно друга вокруг вертикальной оси на угол  $\pi(k+2)/(k+1)$ .

**Рекуррентное свойство графов МСП равномерно распределенных систем.** Опишем свойства графов МСП класса систем  $UD(n, k)$ .

**Утверждение 2.** Пусть система (4) принадлежит классу  $UD(n, k)$ . Для каждого подмножества  $L \subseteq \mathbb{N}_m$  мощности  $n-1$  найдется ребро  $\{J_1(L), J_2(L)\}$  ее графа МСП, такое что  $J_1(L) \cap J_2(L) = L$  и конус  $C(L)$  является общей фасетой для конусов  $C(J_1(L))$  и  $C(J_2(L))$ .

**Доказательство.** Рассмотрим гиперплоскость  $H(L)$ . Обозначив соответствующие ей открытые полупространства через  $H_+$  и  $H_-$ , по определению равномерно распределенной системы имеем

$$|\{j: j \in H_+\}| = |\{j: j \in H_-\}| = k.$$

Проведя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 6, убедимся в том, что множества

$$J_1(L) = |\{j: j \in H_+\}| \cup L, \quad J_2(L) = |\{j: j \in H_-\}| \cup L$$

являются индексами МСП системы (4). Множества  $J_1(L)$  и  $J_2(L)$  – искомые. Утверждение доказано.

**Определение 5.** Опорным  $j$ -подграфом МСП системы неравенств (4), принадлежащей классу  $UD(n, k)$ , назовем подграф  $G(j) = (V(j), E(j))$  ее графа МСП  $G$ , каждая вершина  $J$  которого обладает свойствами

$$\begin{aligned} j &\in J, \\ \mathbf{a}_j &\notin \text{int}(C(L)). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что для равномерно распределенной системы неравенств условие (7) эквивалентно отрицанию условия

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i \in J \setminus \{j\}} \lambda_i \mathbf{a}_i$$

при произвольных  $\lambda_i \geq 0$ . В терминах подграфов  $G(j)$  для равномерно распределенных систем линейных неравенств результат теоремы 4 можно конкретизировать.

**Теорема 7.** Подграф  $G(j)$  системы (4), принадлежащей классу  $UD(n, k)$  при  $n \geq 3$ , изоморфен графу  $\Gamma$  МСП подходящей системы класса  $UD(n-1, k)$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольный номер  $j \in \mathbb{N}_m$ . Не ограничивая общности, положим  $j = m$ . Обозначим через  $Y$  гиперплоскость  $Y = \{\mathbf{y}: (\mathbf{a}_m, \mathbf{y}) = 0\}$ . Для каждого  $j \in \mathbb{N}_m$  справедливо разложение  $\mathbf{a}_j = \lambda_j \mathbf{a}_m + \mu_j \boldsymbol{\eta}_j$ , где  $\boldsymbol{\eta}_j \in S_{n-1} \cap Y$  и  $\mu_j \geq 0$ . По теореме 6  $\mu_j > 0$  для каждого  $j \in \mathbb{N}_{m-1}$ . Рассмотрим систему неравенств (над  $Y$ )

$$(\boldsymbol{\eta}_j, \mathbf{y}) > 0 \quad (j \in \mathbb{N}_{m-1}). \quad (8)$$

Система (8), очевидно, принадлежит классу  $UD(n-1, k)$ . Действительно, предположим, от противного, что для некоторого  $\mathbf{y}^0 \in Y$  выполняется неравенство  $|\{j : (\boldsymbol{\eta}_j, \mathbf{y}^0) > 0\}| < k$ , и рассмотрим вектор  $\mathbf{x}^0 = 0 \cdot \mathbf{a}_m + \mathbf{y}^0$ . Учитывая, что

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}^0) &= (\mathbf{a}_j, \mathbf{y}^0), \quad (j \in \mathbb{N}_{m-1}) \\ (\mathbf{a}_m, \mathbf{x}^0) &= 0,\end{aligned}$$

получим противоречие с условием принадлежности системы (4) классу  $UD(n, k)$ .

Рассмотрим граф  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  МСП системы (8). Убедимся в том, что  $G(m) \cong \Gamma$ . Выберем произвольную вершину  $J \in V(m)$ . Покажем, что подсистема с индексом  $J \setminus \{m\}$  системы (8) является совместной. Действительно, в противном случае найдутся числа  $\beta_i \geq 0$ , такие что

$$\sum_{i \in J \setminus \{m\}} \beta_i \mu_i \boldsymbol{\eta}_i = 0.$$

Тогда

$$\sum_{i \in J \setminus \{m\}} \beta_i \mathbf{a}_i = \left( \sum_{i \in J \setminus \{m\}} \beta_i \lambda_i \right) \mathbf{a}_m + \sum_{i \in J \setminus \{m\}} \beta_i \mu_i \boldsymbol{\eta}_i = C \mathbf{a}_m.$$

По выбору  $G(m)$  (условие (7))  $C \leq 0$ , следовательно, для чисел  $\alpha_i \geq 0$ :

$$\alpha_i = \beta_i \quad (i \in J \setminus \{m\}), \quad \alpha_m = -C$$

справедливо соотношение

$$\sum_{i \in J} \alpha_i \mathbf{a}_i = 0,$$

что противоречит совместности подсистемы с индексом  $J$  системы (4).

С другой стороны, рассмотрим произвольную совместную подсистему системы (8) с индексным множеством  $I$ . По построению система

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) > 0, & (j \in I) \\ (\mathbf{a}_m, \mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

также совместна. Пусть

$$H'' = \langle \boldsymbol{\eta}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{j_{n-2}} \rangle = \{ \mathbf{y} \in Y : (\mathbf{h}'', \mathbf{y}) = 0 \},$$

где

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\eta}_{j_p}, \mathbf{h}'') &= 0 \quad (p \in \mathbb{N}_{n-2}), \\ (\boldsymbol{\eta}_j, \mathbf{h}'') &> 0 \quad (j \in I \setminus \{j_1, \dots, j_{n-2}\})\end{aligned}$$

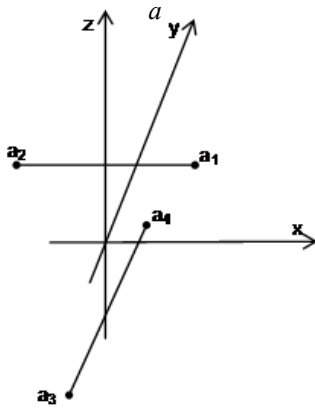
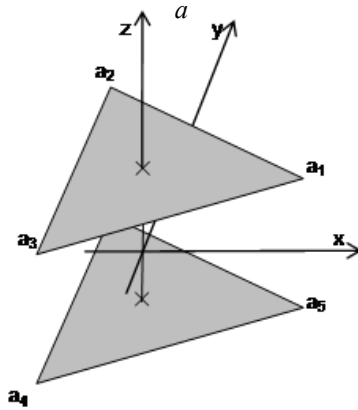
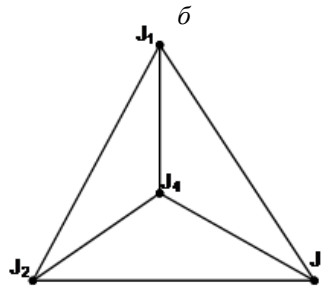
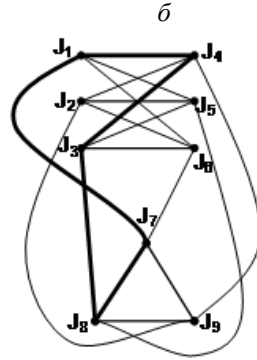
является опорной гиперплоскостью к конусу  $C(I)$  в пространстве  $Y$ . Определив вектор  $\mathbf{x}'' = 0 \cdot \mathbf{a}_m + \mathbf{h}''$ , получаем

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_{j_p}, \mathbf{x}'') &= 0 \quad (p \in \mathbb{N}_{n-2}), \\ (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}'') &> 0 \quad (j \in I \setminus \{j_1, \dots, j_{n-2}\}), \\ (\mathbf{a}_m, \mathbf{x}'') &= 0,\end{aligned}$$

следовательно, гиперплоскость

$$\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = 0 \}$$

является опорной к конусу  $C(I \cup \{m\})$  в исходном пространстве, а множество  $I \cup \{m\}$  является индексом совместной подсистемы системы (4).

Рис. 2. Пример системы класса  $UD(3,1)$  (a) и ее граф МСП (б)Рис. 3. Система – представитель класса  $UD(3,2)$  (a) и ее граф МСП (б)

Таким образом, показано, что множество  $V(m)$  отображается на множество  $VT$  биекцией

$$\psi: V(m) \rightarrow VT, \quad \psi(J) = J \setminus \{m\}.$$

Поскольку

$$(J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}_m) \Leftrightarrow (\psi(J_1) \cup \psi(J_2) = \mathbb{N}_{m-1}),$$

графы  $G(m)$  и  $VT$  изоморфны. Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть система (4) принадлежит классу  $UD(3,k)$ . Произвольный ее  $j$ -опорный подграф МСП  $G(j)$  является простым циклом длины  $2k+1 = m-1$ .

Таким образом, в трехмерном пространстве равномерно распределенные системы по своим свойствам наиболее близки к хорошо изученным системам однородных неравенств, заданным на плоскости, а теорема 7 позволяет продолжить это утверждение рекуррентно на пространства более высоких размерностей.

Например, простейшая равномерно распределенная по Гейлу система неравенств в  $\mathbb{R}^3$  при  $k=1$  (рис. 2) состоит из 4 неравенств, ее граф МСП  $G_1 = (V_1, E_1)$  обладает множеством вершин

$$V_1 = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$$

и является кликой  $K_4$ , т. е. простейшим связным регулярным графом степени 3.

Следующая система, принадлежащая семейству (6), соответствует значению  $k=2$  и обладает регулярным графом МСП  $G_2 = (V_2, E_2)$  степени 4, допускающим разбиение на  $K_{3,3}$  и  $K_3$ . Множество вершин графа  $V_2 = \{J_1, \dots, J_9\}$ , где

$$\begin{aligned} J_1 &= \{1,2,3,4\}, J_2 = \{1,2,3,5\}, J_3 = \{1,2,3,6\}, \\ J_4 &= \{1,4,5,6\}, J_5 = \{2,4,5,6\}, J_6 = \{3,4,5,6\}, \\ J_7 &= \{1,2,5,6\}, J_8 = \{1,3,4,5\}, J_9 = \{2,3,4,6\}. \end{aligned}$$

На рис. 3 выделен 5-цикл, являющийся подграфом  $G_2(1)$ . Заметим, что остальные представители семейства (6) обладают нерегулярными графами МСП, допускающими разбиение на регулярные подграфы, один из которых является полным двудольным графом  $K_{k+1,k+1}$  степени  $k+1$ .

**Задача о минимальном комитетном решении равномерно распределенной системы.** Как сказано выше, комитетное обобщенное решение является коллективным дискретным обобщением понятия решения на случай несовместной системы ограничений.

При моделировании конкретной, например экономической, ситуации с помощью системы ограничений (как правило, представимой в виде системы линейных неравенств и уравнений) возможно циклическое использование

частичных решений – элементов найденного заранее комитета, при этом в каждый момент времени гарантируется, что текущее частичное решение удовлетворяет большинству ограничений системы.

В силу ряда содержательных причин особый интерес представляет поиск комитетных решений с наименьшим возможным (для заданной системы ограничений) числом элементов.

Математическая постановка задачи имеет следующий вид.

**Задача.** "Минимальный комитет системы линейных неравенств" (MCLE). Заданы натуральные числа  $m$  и  $n > 1$  и рациональные векторы  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{Q}^n$ . Требуется найти комитетное решение (комитет) системы (4) с наименьшим числом элементов.

Известно [6], что система (4) в силу условий  $\mathbf{a}_j \in S_{n-1}$  и  $\mathbf{a}_i \pm \mathbf{a}_j \neq 0$  обладает комитетным решением, число элементов которого ограничено сверху числом  $m$ . Известно также, что задача MCLE труднорешаема (даже при фиксированной размерности  $n$ ). В частности, справедлива следующая теорема.

**Теорема 8 [7, 8].**

1. Задача MCLE NP-трудна в сильном смысле и не принадлежит классу  $Arch$  (классу задач комбинаторной оптимизации, обладающих полиномиальным приближенным алгоритмом с фиксированной точностью).
2. Задача MCLE обладает полиномиальным приближенным алгоритмом с точностью  $r = O(m/n)$ .
3. Пусть в системе (4)  $m = 2k + n - 1$  и каждая подсистема из  $n$  неравенств совместна. Указанный выше алгоритм найдет комитетное решение с числом элементов

$$q_{app} \leq 2 \left\lceil \frac{k}{n-1} \right\rceil + 1.$$

4. Если при этом мощность наибольшей совместной подсистемы  $|J_{\max}| \leq (k + n - 1) + t$  для некоторого натурального  $t$ , то справедливо соотношение

$$1 \leq r \leq \frac{2 \left\lceil \frac{k}{n-1} \right\rceil + 1}{2 \left\lceil \frac{k-t}{2t+n-1} \right\rceil + 1} \approx 1 + \frac{2t}{n-1}.$$

Для подкласса равномерно распределенных систем линейных неравенств известен следующий результат.

**Теорема 9 [8].** Минимальный комитет равномерно распределенной по Гейлу системы (4), представителя класса  $UD(n, k)$ , состоит из  $2 \left\lceil \frac{k}{n-1} \right\rceil + 1$  элемента.

**Следствие 2.** Задача MCLE в классе равномерно распределенных систем неравенств полиномиально разрешима.

**Заключение.** Одной из причин циклов в экономике, биологии и некоторых других областях является нехватка ресурсов. В этом случае возможны обходы равновесия, основанные на описанных в работе циклах в множестве максимальных по включению совместных подсистем соответствующих систем ограничений, а также на комитетных конструкциях.

### Список литературы

1. МАЗУРОВ В. Д. Неоднозначная интерпретация противоречивых данных // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, 1984. С. 47–73.
2. ТЯГУНОВ Л. И. О выделении последовательности максимальных совместных подсистем несовместной системы линейных неравенств // Математические методы планирования и управления в больших системах. УНЦ АН СССР. Свердловск, 1973. С. 152–162.
3. ГАЙНАНОВ Д. Н. О графах максимальных совместных подсистем несовместных систем линейных неравенств. М., 1981. 46 с. Деп. в ВИНТИ 12 сентября 1981 г. № 229–81.

4. ГАЙНАНОВ Д. Н., НОВОКШЕНОВ В. А., ТЯГУНОВ Л. И. О графах, порождаемых несовместными системами линейных неравенств // Мат. заметки. 1983. Т. 33, вып. 2. С. 293–300.
5. GALE D. Neighboring vertices on a convex polyhedron // Linear inequalities and related systems. Ed. by H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Princeton: Princeton University Press. 1956. P. 255–263.
6. МАЗУРОВ В. Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. № 3. С. 140–146.
7. ХАЧАЙ М. Ю. О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // Докл. АН. 2006. Т. 406, № 6. С. 742–745.
8. КНАЧАЙ М. YU. On approximate algorithm of a minimal committee of a linear inequalities system // Pattern Recognition and Image Analysis. 2003. V. 13, N 3. P. 459–464.

*Мазуров Владимир Данилович – д-р физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр.*

*Ин-та математики и механики УрО РАН, зав. каф. Урал. гос. ун-та;*

*e-mail: vldmazurov@gmail.com*

*Хачай Михаил Юрьевич – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом*

*Ин-та математики и механики УрО РАН; тел. (343) 3753505, (912) 2468486;*

*e-mail: mkhachay@imm.uran.ru*

Дата поступления – 03.11.2009 г.