УДК 004.053

Об обобщении понятия функции распределения возможностей

М. З. Арсланов

Институт проблем информатики и управления Министерства образования и науки Республики Казахстан,
050010, Алматы, Казахстан

Представлены новые результаты в теории возможностей. Разработано описание теории возможностей в терминах булевых алгебр, являющееся обобщением традиционного описания теории возможностей средствами алгебры подмножеств модельного множества. Доказаны теоремы о представлении различных классов возможностных пространств, о непрерывности возможностных пространств.

Ключевые слова: теория возможностей, функция распределения возможностей.

There are new results presented in this paper. Possibility theory is described by Boolean algebras. This generalize traditional description of possibility theory by the algebra of subsets of model space. The theorems about the representation different types of possibility spaces and about their continuity are proved.

Key words: possibility theory, possibility distribution function.

1. Основные понятия теории возможностей. В настоящее время существует несколько интерпретаций теории возможностей [1-6]. В настоящей работе будем рассматривать ее классический вариант. Аксиоматика теории возможностей аналогична аксиоматике теории вероятностей, за исключением аксиомы сложения, которая заменена аксиомой максимума.

Дадим определения основных понятий теории возможностей. Возможностное пространство есть триплет (Г, Р(Г), П), где Г − модельное пространство, Р(Г) – множество его подмножеств, П − возможностная мера, $\Pi : P(\Gamma)\rightarrow[0,1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\Pi(\varnothing)=0$; $\Pi(\Gamma)=1$;

2) $\Pi(A \cup B)=\max(\Pi(A),\Pi(B))$.

Возможностная мера называется непрерывной сверху (сильнонепрерывной), если для любой счетной совокупности вложенных друг в друга множеств

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n ,$$

такой что $\lim_{i\to\infty} A_i = A$ (другое обозначение $A_n \searrow A$), имеет место равенство $\lim_{i\to\infty} \Pi(A_i) = \Pi(A)$. Возможностное пространство с непрерывной мерой возможности естественно называть непрерывным. Возможностная мера называется непрерывной снизу (слабонепрерывной), если для любой счетной совокупности вложенных друг в друга множеств

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n ,$$

такой что $\lim_{i\to\infty} A_i = A$ (другое обозначение $A_n \nearrow A$), имеет место равенство $\lim_{i\to\infty} \Pi(A_i) = \Pi(A)$. Возможностное пространство со слабонепрерывной мерой возможности естественно называть слабонепрерывным.

Наиболее простой и естественный способ ввести на множестве Г структуру возможностного пространства заключается в определении возможности отдельных элементов посредством некоторой функции $\pi : \Gamma \rightarrow [0,1]$ и последующем определении возможностной меры П по формуле

$$\Pi(A) = \sup_{\gamma\in A} \pi(\gamma).$$

Для определенной таким образом меры возможности П функция π называется функцией распределения возможностей. Назовем функцию распределения возможностей непрерывной, если непрерывна порождаемая ею мера возможностей. Носителем функции распределения π называется множество точек, в которых она не равна нулю: $\operatorname{supp}\pi(\cdot)=\{\gamma\in\Gamma\mid\pi(\gamma)>0\}$.

Определение 1. Назовем бинарным возможностное пространство, мера возможностей которого принимает только два значения: 0; 1.

Определение 2. Бинарное возможностное пространство $(X,P(X),\Pi:P(X)\to\{0,1\})$ назовем нерассекаемым, если из $X_1\cup X_2=X, X_1\cap X_2=0$ следует, что $\min(\Pi(X_1),\Pi(X_2))=0$.

В теории вероятностей наряду с ее традиционным описанием с использованием алгебры множеств событий существует описание с помощью булевых алгебр [7]. Дадим определения основных понятий булевых алгебр и алгебры множеств. Булева алгебра − это непустое множество *B*, в котором определены две бинарные операции $\vee,\wedge$ и одна унарная операция ', удовлетворяющая системе аксиом

1) $A\vee B=B\vee A,\ A\wedge B=B\wedge A,$

2) $A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C,\ A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$,

3) $(A\wedge B)\vee B=B,\ (A\vee B)\wedge B=B$,

4) $A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$,

$A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$,

5) $(A\wedge A')\vee B=B,\ (A\vee A')\wedge B=B$.

Определение 3. Непустое подмножество I булевой алгебры *B* называется идеалом, если выполняются условия

1) $A,B\in I\Rightarrow A\vee B\in I,$

2) $B\in I, A\subset B\Rightarrow A\in I.$

Идеал называется главным, если он является множеством всех подэлементов данного элемента $C\in B$.

Определение 4. Непустое подмножество I булевой алгебры *B* называется фильтром, если выполняются условия

1) $A,B\in I\Rightarrow A\wedge B\in I,$

2) $B\in I, A\supset B\Rightarrow A\in I.$

Фильтр называется главным, если он является множеством всех надэлементов данного элемента $C\in B$. Максимальный фильтр называется ультрафильтром. Множество ультрафильтров булевой алгебры всех подмножеств некоторого множества *X* образует компакт Стоуна данной алгебры, который принято обозначать βX (другое обозначение $S(X)$). Компакт Стоуна является максимальным бикомпактным расширением (компактификацией Стоуна − Чеха), если *X* снабжено дискретной топологией.

Теорию возможностей можно также описать с помощью булевых алгебр без прямого использования алгебры множеств. Покажем, как это делается.

Определение 5. Возможностным пространством называется пара (B,Π), где *B* есть булева алгебра, Π – возможностная мера, удовлетворяющая аксиомам

1) $\Pi(0)=0, \Pi(1)=1$,

2) $\Pi(a\vee b)=\max(\Pi(a),\Pi(b)).$

Поскольку алгебра множеств является булевой алгеброй, легко показать, что данное определение для булевой алгебры множеств будет совпадать с традиционным. Поэтому далее будем в основном использовать описание теории возможностей с помощью алгебры множеств.

2. Булевы меры возможностей. Аксиома максимума показывает, что теория возможностей связана с булевыми алгебрами. Поэтому в классе возможностных мер можно выделить булевы меры.

Определение 6. Возможностная мера $\Pi: P(X)\to[0,1]$ называется булевой, если

$$\Pi(A\wedge B)=\min(\Pi(A),\Pi(B)).$$

В частности, нерассекаемая бинарная возможностная мера является булевой. Возникает вопрос, каким образом понятие булевой меры связано с понятиями непрерывности. Легко построить пример булевой меры, не являющейся сильнонепрерывной. Видно, что на несчетном модельном множестве *X* возможностная мера

$$\Pi(A)=\begin{cases}0, \text{ если } A-\text{счетное множество,}\\ 1, \text{ если } A-\text{несчетное множество}\end{cases}$$

является булевой, но не сильнонепрерывной.

Лемма 1. Булева мера может принимать только значения 0; 1.

Доказательство. Пусть, напротив, существуют три множества $A, B, C,$ такие что

$$\Pi(A)<\Pi(B)<\Pi(C).$$

Рассмотрим множества

$$A'=A,\ B'=B\setminus A,\ C'=C\setminus(A\cup B).$$

Видно, что штрихованные множества попарно не пересекаются, при этом $\Pi(A')=\Pi(A)$. Так как $\Pi(B)=$ $=\max(\Pi(B\setminus A),\Pi(B\cap A)),$ то $\Pi(B')=\Pi(B\setminus A)=\Pi(B)$. Аналогично $\Pi(C')=\Pi(C)$. Поэтому с самого начала можно предполагать, что множества *A, B, C* попарно не пересекаются. Но тогда для множеств $A_1=A\cup B, A_2=A\cup C$ имеем

$$\Pi(A_1)=\Pi(B),\Pi(A_2)=\Pi(C),$$
$$\Pi(A_1\cup A_2)=\Pi(A)<\min(\Pi(A_1),\Pi(A_2)).$$

Полученное противоречие и то обстоятельство, что $\Pi(\varnothing)=0, \Pi(X)=1$, доказывает лемму окончательно.

Лемма 2. Возможностная мера $\Pi(\cdot)$ является булевой тогда и только тогда, когда она бинарная нерассекаемая.

Доказательство. Бинарная нерассекаемая мера является булевой, так как при $\Pi(A\cap B)<\min(\Pi(A),\Pi(B))$ $\Pi(A)=\Pi(B)=1$. Но $\Pi(A\cap B)=0$, т. е. $\Pi(A\backslash B)=1$ и имеет место противоречие со свойством нерассекаемости. То, что булева мера является бинарной, установлено в лемме 1. Покажем ее нерассекаемость. Если бы булева мера была рассекаема, то для некоторых подмножеств A,B имели бы место равенства $\Pi(A)=\Pi(B)=1, A\cap B=\varnothing$ **.** Но тогда она не является булевой. Лемма доказана. Отсюда следует вывод, что булева мера порождает нерассекаемое бинарное возможностное пространство.

Вообще говоря, для произвольной возможностной меры понятие непрерывности сверху является более сильным понятием, чем понятие непрерывности снизу. Для булевых мер возможностей данные понятия совпадают. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. Непрерывная снизу булева мера является непрерывной сверху.

Доказательство. Пусть, напротив, существуют множества $A_i, i=1,2,...$, такие что $A_i \searrow \varnothing, \Pi(A_i)=1, i=1,2,...$ Но тогда множества $A'_i=X\setminus A_i$ таковы, что $A'_i \nearrow X, \Pi(A'_i)=0.$

Это противоречит непрерывности снизу булевой меры. Лемма доказана.

Лемма 3 естественно приводит к вопросу о существовании разрывной булевой возможностной меры. Иначе этот вопрос можно сформулировать следующим образом: существуют ли нетривиальные (невырожденные, неэлементарные) булевы меры? Пока можно привести единственный тривиальный пример булевой возможностной меры, которая имеет функцию распределения возможностей с носителем, состоящим из единственной точки модельного пространства:

$$\pi(x)=\begin{cases}1, x=x_0,\\ 0, x\neq x_0.\end{cases}$$

Эта функция распределения порождает следующую возможностную меру:

$$\Pi(A)=\begin{cases}1, x_0\in A,\\ 0, x_0\notin A.\end{cases}$$

Покажем существование нетривиальной, но и неконструктивной булевой возможностной меры. Для этого воспользуемся тем, что в любом бесконечном множестве существует свободный ультрафильтр *U*. Тогда мера

$$\Pi_U(A) = \begin{cases} 1, A \in U, \\ 0, A \notin U \end{cases} \quad (1)$$

является булевой. Заметим, что все булевы меры порождаются таким образом. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Любая булева мера порождает ультрафильтр

$$U_\Pi = \{A \subset X \mid \Pi(A) = 1\}. \quad (2)$$

Наоборот, возможностная мера (1) является булевой.

Доказательство. Сначала докажем, что (2) является ультрафильтром. Это следует из свойств возможностной булевой меры. Если $A_1 \subset A_2$ и $\Pi(A_1) = 1$, то и $\Pi(A_2) = 1$. Если $\Pi(A) = 1$, то в силу нерассекаемости $\Pi(X \setminus A) = 0$, т. е. если $A \in U_\Pi$, то $X \setminus A \notin U_\Pi$. Наконец, для любого А имеем $X = A \cup (X \setminus A)$, откуда получаем $1 = \Pi(X) = \max(\Pi(A), \Pi(X \setminus A))$. Иными словами, или $\Pi(A) = 1, A \in U_\Pi$, или $\Pi(X\setminus A) = = 1, X \setminus A \in U_\Pi$.

Теперь покажем, что мера (1) является булевой. Пусть дан ультрафильтр U над множеством X. В силу свойств ультрафильтра $\varnothing \notin U \Rightarrow \Pi_U(\varnothing) = 0,\ X \in U \Rightarrow \Pi_U(X) = 1.$

Остается показать справедливость аксиомы максимума. Рассмотрим множество $A = A_1 \cup A_2$. Если $\Pi_U(A_1) = \Pi_U(A_2) = 0$, то $A_i \notin U$ $(i = 1,2)$ и, следовательно, $A \notin U$, т. е. $\Pi(A) = 0$. Если хотя бы для одного из A_i $(i = 1,2)$ выполняется условие $\Pi(A_i) = 1$, то один из них, а следовательно, и их объединение обязательно принадлежит ультрафильтру, т. е. в этом случае $\Pi_U(A) = 1$. Аксиома максимума и лемма доказаны.

Из леммы 4 следует, что в случае если ультрафильтр U является свободным, то порождаемая им булева мера будет нетривиальной. Однако в отличие от тривиальной эта мера будет разрывной. Покажем, как строится нетривиальный ультрафильтр на произвольном бесконечном множестве X. Возьмем фильтр Фреше

$$F = \{A \subset X \mid X \setminus A - \text{конечное множество}\}.$$

Множества из F и их дополнения отметим. Оставшиеся множества вполне упорядочим. В множестве неотмеченных множеств возьмем наименьшее по порядку множество B. Легко видеть, что его дополнение тоже будет неотмеченным. Присоединим к фильтру F множество B и все его содержащие множества и отметим эти множества и все их дополнения. Используя трансфинитную индукцию, получим нетривиальный ультрафильтр. Это показывает существование нетривиальных ультрафильтров и тем самым нетривиальных булевых мер возможностей.

Таким образом, установлено взаимнооднозначное соответствие между ультрафильтрами модельного множества X и булевыми возможностными мерами на нем.

Дальнейшее рассмотрение показывает, что даже если мы имеем нетривиальную булеву меру, ее структура во многом аналогична структуре тривиальной булевой меры. Продемонстрируем это на примере модельного пространства [0,1]. Тривиальная булева мера имеет функцию распределения возможностей

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, x = x_0, \\ 0, x \neq x_0 \end{cases}$$

для некоторой точки $x_0 \in [0,1]$. Пусть $\Pi(\cdot)$ − произвольная булева мера. Покажем, что существует выделенная точка x_0, обладающая свойством насыщения.

Определение 7. Точка $x_0 \in [0,1]$ называется точкой насыщения булевой меры $\Pi(\cdot)$, если для любой окрестности этой точки U имеет место $\Pi(U) = 1$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Для любой булевой меры на интервале [0,1] существует единственная точка насыщения.

Доказательство. Доказательство проводится по стандартной схеме пополамного деления. Представим интервал [0,1] в виде объединения в два раза меньших интервалов

$$[0,1] = [0, \tfrac{1}{2}] \cup [\tfrac{1}{2}, 1] = A_0 \cup A_1.$$

Тогда для одного и только одного из множеств A_0, A_1 имеем $\Pi(A_{i_1}) = 1\,(i_1 = 0,1)$. Этот последний интервал $A_{i_1} = [0.i_1, \frac{1}{2} + 0.i_1]$ в двоичной записи вновь разделим на два подынтервала в два раза меньшей длины $A_{i_1} = A_{i_1,0} \cup A_{i_1,1}$, где

$$A_{i_1,0} = [0.i_1 0, \frac{1}{4} + 0.i_1 0],\; A_{i_1,1} = [0.i_1 1, \frac{1}{4} + 0.i_1 1].$$

Вновь только для одного из этих подынтервалов $\Pi(A_{i_1 i_2}) = 1$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность вложенных друг в друга подынтервалов

$$A_{i_1} \subset A_{i_1,i_2} \subset \ldots \subset A_{i_1,i_2,\cdots i_k} \subset \ldots,$$

причем $\Pi(A_{i_1,i_2,\cdots i_k}) = 1$ для каждого подынтервала этой последовательности. Но тогда существует единственная точка $x_0 \in [0,1]$, принадлежащая всем этим подынтервалам, двоичная запись которой имеет вид $x_0 = 0.i_1, i_2, \ldots i_k \ldots$. Покажем, что $x_0 \in [0,1]$ является точкой насыщения. Пусть $U -$ некоторая окрестность точки x_0. В силу этого для некоторого интервала $A_{i_1,i_2,\cdots i_k}$ имеет место включение $U \subset A_{i_1,i_2,\cdots i_k}$, т. е. $\Pi(U) = 1$ для любой окрестности точки x_0. Следовательно, точка x_0 является точкой насыщения. Из свойств булевой меры следует невозможность существования двух точек насыщения. Если бы нашлась вторая точка насыщения x_1, то, взяв две непересекающиеся окрестности U_0 и U_1 точек x_0 и x_1, соответственно получили бы $\Pi(U_0) = \Pi(U_1) = 1$. Однако $\Pi(U_0 \cap U_1) = 0,$ что противоречит булевости возможностной меры Π. Утверждение доказано.

Аналогичный результат имеет место для модельного пространства счетной мощности, если в качестве него взять пересечение множества рациональных точек Q с интервалом [0,1]. В этом случае для любой булевой меры также существует точка насыщения. Различие заключается в том, что точка насыщения может не принадлежать модельному пространству, т. е. быть иррациональным числом. В этом случае очевидно, что булева мера с подобной точкой насыщения является нетривиальной. Следует отметить, что любая точка $x_0 \in [0,1]$ может быть точкой насыщения для некоторой булевой меры на $Q \cap [0,1]$. Поскольку все нетривиальные ультрафильтры неконструктивны, булева мера с иррациональной точкой насыщения $x_0 \in [0,1]$ должна быть также неконструктивной.

3. Обобщенная функция распределения возможностей. Каждой возможностной мере Π на модельном пространстве X по формуле

$$\pi(U) = \inf_{A \in U} \Pi(A) \tag{3}$$

сопоставим функцию на множестве ультрафильтров этого пространства. Назовем эту функцию обобщенной функцией распределения возможностей для данной возможностной меры. Правомерность такого определения вытекает из справедливости следующей леммы.

Лемма 5. Для любой возможностной меры выполняется равенство

$$\Pi(A) = \sup_{U:A \in U} \pi(U).$$

Доказательство. Для любого ультрафильтра U, содержащего множество A в силу определения (3) $\pi(U) \le \Pi(A)$. Остается указать ультрафильтр $U : \pi(U) = \Pi(A), A \in U$. Для построения искомого ультрафильтра с помощью трансфинитной индукции используем фильтр $F_0 = \{B \mid B \subset A\}$.

Ясно, что $\inf\{\Pi(B) \mid B \in F_0\} = \Pi(A).$ Для очередного множества

$$C_1 = C \notin F_t,\; C_2 = X \setminus C_1 \notin F_t$$

из этих двух множеств выбираем множество, для которого $\Pi(C_i) = 1$, и добавляем его к F_t вместе со всеми его содержащими. В силу сделанного выбора $\inf\{\Pi(B) \mid B \in F_t\} = \Pi(A)$ для любого *t*. В результате получим искомый ультрафильтр. Лемма доказана.

Лемма 5 позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть *S*(*X*) является стоуновским компактом модельного множества *X*. Тогда любая неотрицательная функция $\pi : S(X) \to [0,1]$ на нем, такая что

$$\sup_U \pi(U) = 1, \tag{4}$$

определяет меру возможностей в пространстве *X* по формуле

$$\Pi(A) = \sup_{U:A\subset U} \pi(U). \tag{5}$$

Обратно, для любой меры возможности Π существует функция $\pi : S(X) \to [0,1]$, такая что

$$\Pi(A) = \sup_{U:A\subset U} \pi(U).$$

Доказательство. Пусть дана неотрицательная функция, удовлетворяющая (4). Ясно, что порождаемая ею мера (5) монотонна. Остается показать, что эта мера удовлетворяет аксиоме максимума:

$$\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)).$$

Прежде всего

$$\Pi(A \cup B) = \sup_{U:A\cup B\subset U} \pi(U).$$

Пусть ультрафильтр U' таков, что

$$A \cup B \in U', \Pi(A \cup B) \geq \pi(U') - \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Тогда либо $A \in U'$, либо $B \in U'$. Пусть, например, $A \in U'$. В этом случае $\Pi(A) \geq \pi(U') - \varepsilon, \varepsilon > 0.$ Поскольку это справедливо для любого $\varepsilon > 0$, окончательно убеждаемся в справедливости аксиомы максимума для Π. Справедливость второй части теоремы следует из леммы 5. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что любая возможностная мера обладает обобщенной функцией распределения возможностей, заданной на стоуновском компакте модельного пространства X.

В качестве примера покажем, что всякая булева мера порождается обобщенной функцией распределения $\pi(s) : S(X) \to [0,1]$, имеющей вид

$$\pi(s) = \begin{cases} 1, & s = s_0, \\ 0, & s \neq s_0 \end{cases}$$

для некоторой точки s_0 из $S(X)$, т. е. для некоторого ультрафильтра. Действительно, пусть в двух различных точках $\pi(s_1) = \pi(s_2) = 1, s_1 \neq s_2$. Тогда в модельном пространстве X существует подмножество A, такое что

$$A \in s_1, A \notin s_2, X \setminus A \in s_2, X \setminus A \notin s_1.$$

Из $A \in s_1$ следует, что $\Pi(A) = 1$. Из $X \setminus A \in s_2$ следует, что $\Pi(X \setminus A) = 1$. Это противоречит свойству булевости возможностной меры.

Лемма 6. Пусть

$$\pi(q) = \inf_{A\in q} \Pi(A). \tag{6}$$

Тогда $\pi(\cdot)$ является полунепрерывной функцией на стоуновском компакте $S(X)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(q_0)$ точки $q_0 \in S(X)$, такая что $\pi(q) \leq \pi(q_0) + \varepsilon$ для любого $q \in U(q_0)$. При этом в качестве окрестности точки q_0 достаточно взять какой-нибудь главный идеал M, соответствующий какому-либо множеству $A_0 \subset X$. В качестве $A_0 \subset X$ возьмем такое, чтобы согласно (6) выполнялось $A_0 \in q_0$ и $\pi(q_0) \geq \Pi(A_0) - \varepsilon.$ Тогда $A_0 \in q$ для любого q_0 $q_0 \in M$, т. е. $\pi(q) \leq \Pi(A_0)\ \forall q \in M$, иными словами, $\pi(q_0) \geq \pi(q) - \varepsilon\ \forall q \in M.$ Лемма доказана.

Покажем, что если две полунепрерывные сверху функции $\pi_1, \pi_2 : S(X) \to [0,1]$ не равны, то для порождаемых ими возможностных мер существует множество, на котором они не равны, т. е. существует множество $A \subset X$, такое что $\Pi_1(A) \neq \Pi_2(A)$. Действительно, пусть

$$\Pi_1(A) = \sup_{q:A\in q} \pi_1(q), \Pi_2(A) = \sup_{q:A\in q} \pi_2(q),$$

и $\pi_1(q_0) \neq \pi_2(q_0)$. Например,

$$\pi_1(q_0) \geq \pi_2(q_0) + 3\varepsilon, \varepsilon > 0. \tag{7}$$

В силу полунепрерывности сверху $\pi_1(q_0) \geq \pi_1(q) - \varepsilon$ для любого q из некоторой окрестности точки q_0. Выберем эту окрестность таким образом, чтобы $\pi_2(q_0) \geq \pi_2(q) - \varepsilon$ для любого q из этой же окрестности точки q_0. Но тогда

$$\pi_1(q_0) \leq \Pi_1(A) \leq \pi_1(q) + \varepsilon, \pi_2(q_0) \leq \Pi_2(A) \leq \pi_2(q) + \varepsilon,$$

что противоречит (7).

Таким образом, существует взаимнооднозначное соответствие между полунепрерывными сверху на стоуновском компакте $S(X)$ функциями в отрезок [0,1] с наименьшей верхней гранью, равной 1, и возможностными пространствами (B, Π).

Далее исследуем взаимосвязи между свойствами (B, Π) и свойствами ее обобщенной функции распределения.

В качестве примера рассмотрим модельное множество натуральных чисел и σ-алгебру всех его подмножеств. Стоуновский компакт этой булевой алгебры есть канторово совершенное множество. Есть взять известную функцию Кантора на нем, то она непрерывна и достигает максимума, равного 1. Следовательно, эта функция задает некоторую возможностную меру. Имеет место следующая лемма, которую приведем без доказательства.

Лемма 7. Полунепрерывная сверху обобщенная функция распределения возможностей $\pi : S(X) \to [0,1]$ порождает возможностное пространство с обычной функцией распределения возможностей тогда и только тогда, когда π является непрерывной функцией.

Таким образом, меры возможности, обладающие функцией распределения возможностей, естественным образом вкладываются в банахову алгебру $C(S)$ (S − компактификация Стоуна − Чеха модельного пространства X) и составляют ту часть конуса неотрицательных функций, норма которых равна единице, т. е. часть единичной сферы. Это позволяет известные конструкции и приемы функционального анализа "бесплатно" применять в теории возможностей.

В терминах пространства Стоуна непрерывные сверху возможностные пространства характеризуются следующим образом.

Утверждение 2. Непрерывными сверху возможностными пространствами являются те и только те пространства, возможностные меры которых имеют обобщенную функцию распределения, на остаточном множестве $\beta X \setminus X$ равную нулю.

Доказательство. Предположим сначала, что Π − непрерывная сверху возможностная мера. Тогда в силу теоремы 1 и работы [8] имеем свойство множества $A_\varepsilon = \{x \in X \mid \Pi(\{x\}) \geq \varepsilon\}$ быть конечным для любого $\varepsilon > 0$. Пусть в некоторой точке $q \in \beta X \setminus X$ $\pi(q) > 0$, следовательно, ультрафильтр, определяющий q (причем $\{x\} \notin q\ \forall x \in X$), таков что $\inf_{A\in q} \Pi(q) > 0.$ Рассмотрим конечное множество $A_{\pi(q)}$. Пусть $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ − все его элементы. Тогда в ультрафильтре q можно указать множество A^*, не содержащее ни одного из этих элементов. Но тогда $\Pi(A^*) < \pi(q) \leq \inf_{A\in q} \Pi(q)$, т. е. получаем противоречие.

Обратно, пусть $\pi(q)=0$ для любого $q \in \beta X \setminus X$, однако Π не является полунепрерывной функцией. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем бесконечное множество $A_\varepsilon = \{x \in X \mid \Pi(\{x\}) \ge \varepsilon\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ с неравными элементами: $\Pi(\{x_i\}) \ge \varepsilon$. Рассмотрим фильтр, порожденный множеством $F = \{A_n \subset X \mid A_n = \ = \{x_n, x_{n+1}, ...\}, n = 1, 2, ...\}$. Легко видеть, что это фильтр. Теперь ультрафильтр из $\beta X \setminus X$ можно построить таким образом, чтобы $q \in \beta X \setminus X, \pi(q) \ge \varepsilon$. Основная идея такого построения заключается в том, что в процессе добавления при помощи трансфинитной индукции множества B или $X \setminus B$ добавляем то, для которого мера возможности Π равна 1. Утверждение доказано.

Список литературы

1. ZADEH L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets Systems. 1978. V. 1. P. 3−28.
2. ДЮБУА Д., А. ПРАД. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний и информатике. М.: Радио и связь, 1990.
3. KLIR G. J. On fuzzy-set interpretation of possibility theory // Fuzzy Sets Systems. 1999. V. 108. P. 263−273.
4. АВЕРКИН А. Н., БАТЫРШИН И.З., БЛИШУН А.Ф. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
5. ПЫТЬЕВ Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
6. ЯЗЕНИН А. В. Методы оптимизации и принятия решений при нечетких данных. Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Тверь, 1995.
7. СИКОРСКИЙ Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
8. АРСЛАНОВ М. З., ИСМАИЛ Е. Е. Непрерывность функций распределения и мер возможностей // Докл. АН РК. 2000. № 2. С. 33–37.

Арсланов Марат Зуфарович – д-р физ.-мат. наук, доц., зав. лабораторией
Ин-та проблем информатики и управления МОН РК;
тел.(727) 272-37-11, e-mail: mars@ipic.kz

Дата поступления – 17.09.2009 г.