ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ ТРАЕКТОРИЙ И КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

М. Н. Калимолдаев, З. Н. Мурзабеков, А. А. Джусупов, А. З. Мурзабеков

Институт проблем информатики и управления Министерства образования и науки Республики Казахстан, 050010, Алма-Ата, Казахстан

УДК 62-52

Рассматривается задача оптимального управления для линейных нестационарных систем с закрепленными концами траекторий. Предложен конструктивный алгоритм управления с учетом ограничений.

Ключевые слова: задача оптимального управления, система дифференциальных уравнений, множители Лагранжа, синтезирующее управление, квадратичный функционал.

An optimal control problem for linear non-stationary systems with fixed ends of the trajectories is discussed. A constructive algorithm for synthesizing control with the control constraints is proposed.

Key words: optimal control problem, the system of differential equations, Lagrange multipliers, synthesizing control, quadratic functional.

Введение. В наиболее известных работах в области моделирования и автоматического управления можно найти примеры удачной постановки и решения различных задач [1–4]. Многие задачи оптимального управления рассматриваются в двух постановках. Согласно одной из них оптимальное управление ищется как функция времени и начального состояния системы. Другая постановка задачи синтеза предполагает поиск оптимального управления в виде некоторой функции текущего состояния управляемой системы и времени.

В основе решения задач оптимального управления в первой постановке лежит принцип максимума Понтрягина [5] (решение сводится к соответствующей краевой задаче), а решение той же задачи во второй постановке основано на динамическом программировании (задача сводится к решению уравнения Беллмана [6]).

Разработка различных способов построения алгоритмов управления, обладающих необходимыми для приложений свойствами, является актуальной задачей современных информационных технологий [7].

В данной работе рассматривается постановка задачи оптимального управления, когда для управляемой системы задаются оба граничных условия. Предлагается конструктивный алгоритм управления, основанный на принципе обратной связи с учетом ограничений. Задача оптимального управления системами с закрепленными концами траекторий возникает, например, при исследовании динамики робототехнических и электроэнергетических систем, химических и ядерных реакторов. В простейшем случае динамика исследуемых систем может быть описана линейными дифференциальными уравнениями, критерием качества управления может служить квадратичный функционал.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу об оптимальном управлении линейной нестационарной системой в соответствии с квадратичным критерием качества при наличии ограничений на управления. Если компоненты управляющего вектора не ограничены по величине, то для управляемой линейной системы можно найти аналитически оптимальные управления и оптимальные траектории.

Пусть управляемая система описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}, \qquad t \in (t_0, T); \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}, \ \ \boldsymbol{x}(T) = 0; \ \ \boldsymbol{u}(t) \in U(t) = \{\boldsymbol{u} | \boldsymbol{\alpha}(t) \le \boldsymbol{u}(t) \le \boldsymbol{\beta}(t), \ \ t \in (t_0, T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in C[t_0, T], \ \ \ \boldsymbol{\alpha} < 0, \ \ \ \boldsymbol{\beta} > 0\} \subset L_2((t_0, T), \, R_m), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ — вектор состояния объекта управления размерности $n \times 1$; $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$ — вектор управляющих воздействий размерности $m \times 1$; $A(t)$, $B(t)$ — заданные непрерывные и ограниченные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; $\boldsymbol{x_0}$ — заданный вектор.

Обозначим через $\Delta(t_0, T, \boldsymbol{x_0})$ множество всех допустимых управлений, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{u}(t) \in U(t)$, $t \in (t_0, T)$, и соответствующих траекторий $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{u})$ системы (1), определенных на отрезке $t_0 < t < T$, т. е. множество допустимых пар $\{\boldsymbol{x}(t), \ \boldsymbol{u}(t)\}$:

$$\Delta(t_0, T, \boldsymbol{x_0}) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) : \ \boldsymbol{u}(t) \in U(t), \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t),$$

$$t_0 < t < T, \ \ \ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}, \ \ \ \boldsymbol{x}(T) = 0\}. \tag{4}$$

Пусть на множестве (4) задан функционал

$$J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{T} [\boldsymbol{x}^* Q(t) \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^* R(t) \boldsymbol{u}] \, dt, \tag{5}$$

где $Q(t)$, $R(t)$ — заданные симметричные непрерывные и ограниченные матрицы размерности $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, удовлетворяющие условиям $Q(t) \ge 0$ (неотрицательно-определенная), $R(t) > 0$ (равномерно положительно-определенная).

Предположим, что множество (4) не пусто и система (1) управляема, т. е. выполняется условие

$$G(t_0, T) = \int\limits_{t_0}^{T} \Phi(t_0, t) B(t) B^*(t) \Phi^*(t_0, t) \, dt > 0, \tag{6}$$

где $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$; $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений системы, описываемой однородным дифференциальным уравнением

$$\dot{\boldsymbol{z}} = A(t)\boldsymbol{z}.$$

Задача. Найти синтезирующее управление $\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x_0}, t_0, T)$, такое что соответствующая ему пара $(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}(t)) \in \Delta(t_0, T, \boldsymbol{x_0})$ (4) и доставляет минимальное значение функционалу (5).

Для решения поставленной задачи образуем вспомогательный функционал с применением множителей Лагранжа специального вида. Для этого добавим к функционалу (5) систему дифференциальных уравнений (1) с множителем $\boldsymbol{\lambda} = K(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}(t)$ и выражение $\boldsymbol{\lambda_1^*}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda_2^*}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\beta})$, где $\boldsymbol{\lambda_1} \ge 0$; $\boldsymbol{\lambda_2} \ge 0$. В результате получим функционал

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \int\limits_{t_0}^{T} \Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^*Q(t)\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^*R(t)\boldsymbol{u} + (K(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}(t))^*(A(t)\boldsymbol{x}+B(t)\boldsymbol{u}-\dot{\boldsymbol{x}})+$$
$$+\boldsymbol{\lambda}_1^*(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{\alpha}(t)-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}_2(\boldsymbol{x},t)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\beta}(t))\Big]\,dt, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$ — векторная функция размерности $n\times 1$; $K=K(t)$ — симметричная положительно-определенная матрица размерности $n\times n$.

Множитель $\boldsymbol{\lambda} = K(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}(t)$ снимает ограничения, налагаемые на допустимые пары $\{\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t)\}$ в виде системы дифференциальных уравнений (1), а функции $\{\boldsymbol{\lambda}_1(\boldsymbol{x},t),$ $\boldsymbol{\lambda}_2(\boldsymbol{x},t)\}$ — соответствующие ограничения, налагаемые на управления (3).

Для рассматриваемой задачи метод множителей Лагранжа (принцип освобождения от связей) состоит в следующем: исходная задача оптимального управления с ограничениями сводится к другой задаче без ограничений. При этом новая задача формулируется таким образом, чтобы ее решение являлось решением первоначальной задачи [8, 9].

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$v(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^*K(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{q}(t) - \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^*(t)W(t,T)\boldsymbol{q}(t), \quad \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\lambda} = K(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}(t); \quad (8)$$

$$M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^*[Q(t)+\dot{K}(t)]\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^*R(t)\boldsymbol{u} + (K(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}(t))^*(A(t)\boldsymbol{x}+B(t)\boldsymbol{u})+$$
$$+\boldsymbol{x}^*\dot{\boldsymbol{q}}(t) - \boldsymbol{q}^*(t)W(t,T)\dot{\boldsymbol{q}}(t) - \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^*(t)\dot{W}(t,T)\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{\lambda}_1^*(\boldsymbol{\alpha}(t)-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}_2^*(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\beta}(t)). \quad (9)$$

Тогда, используя функции (8), (9), функционал $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ (7) представим в следующем виде:

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = v(\boldsymbol{x}(t_0),t_0) - v(\boldsymbol{x}(T),T) + \int\limits_{t_0}^{T} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\,dt. \quad (10)$$

Решение задачи. Произведем выбор K, W, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$ таким образом, чтобы при каждом фиксированном $t\in(t_0,T)$ функция $M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$ достигала наименьшего значения на паре $(\tilde{\boldsymbol{x}},\ \tilde{\boldsymbol{u}})$. Если при этом функция $\tilde{\boldsymbol{x}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при управлении $\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x_0},t_0,T)$ с условиями (2), (3), то такая пара $(\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\tilde{\boldsymbol{u}}(t))$ является искомым решением поставленной задачи.

Методами дифференциального исчисления находим управление, обеспечивающее минимальное значение функции $M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$ из (10) в следующем виде:

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = -R^{-1}(t)[B^*(t)(K(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}(t)) - \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2].$$

Обозначим $\boldsymbol{\varphi} = -R^{-1}[-\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2]$, тогда синтезирующее управление принимает вид

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = -R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}(t)) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t). \quad (11)$$

Множители $\boldsymbol{\lambda}_1 \geq 0$, $\boldsymbol{\lambda}_2 \geq 0$ определим таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\boldsymbol{\lambda}_1^*(\boldsymbol{\alpha}(t)-\tilde{\boldsymbol{u}}) = 0, \ \ \boldsymbol{\lambda}_2^*(\tilde{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{\beta}(t)) = 0. \quad (12)$$

Для этого осуществим выбор $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$, $\boldsymbol{\varphi}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\lambda_1} = -R(t)\inf(0,\, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{\alpha}(t)),\, \boldsymbol{\lambda_2} = -R(t)\inf(0,\, \boldsymbol{\beta}(t) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = -\inf(0,\, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{\alpha}(t)) + \inf(0,\, \boldsymbol{\beta}(t) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)),$$

где

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = -R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}(t)). \tag{14}$$

Определим функцию $M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$ на управлении, задаваемом формулой (11). Подставляя управление (11) в выражение (9) и группируя подобные члены, получаем функцию

$$M(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{u}},t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^*[Q(t) + K(t)A(t) + A^*(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t) + \dot{K}(t)]\boldsymbol{x}+$$
$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^*R(t)\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{x} - W(t,T)\boldsymbol{q})^*[\dot{\boldsymbol{q}} + A^*(t)\boldsymbol{q} - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^*(t)\boldsymbol{q} - W^{-1}(t,T)B(t)\boldsymbol{\varphi}]+$$
$$+(\boldsymbol{x} - W(t,T)\boldsymbol{q})^*W^{-1}(t,T)B(t)\boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^*[\dot{W} - W(t,T)A_1^*(t) - A_1(t)W(t,T)+$$
$$+B_1(t)]\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\lambda_1^*}(\boldsymbol{\alpha}(t) - \tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\lambda_2^*}(\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\beta}(t)). \tag{15}$$

Осуществим выбор матриц K, $W(t,T)$ и функции $\boldsymbol{q}(t)$ следующим образом:
1) матрица $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K} = -KA(t) - A^*(t)K + KB(t)R^{-1}(t)B^*(t)K - Q(t),\;\; K(t_0) = K_0; \tag{16}$$

2) матрица $W(t,T)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{W} = W(t,T)A_1^*(t) + A_1(t)W(t,T) - B_1(t), \quad W(T,T) = 0; \tag{17}$$

3) функция $\boldsymbol{q}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -A_1^*(t)\boldsymbol{q} + W^{-1}(t,T)B(t)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t),\;\; \boldsymbol{q}(t_0) = W^{-1}(t_0,T)\boldsymbol{x}(t_0), \tag{18}$$

где

$$A_1(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t), \quad B_1(t) = B(t)R^{-1}(t)B^*(t). \tag{19}$$

Пусть существуют решения уравнений (16)–(18) и выполнены условия (12). Тогда значение функции (15) равно

$$M(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{u}},t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^*(\tilde{\boldsymbol{x}},t)R(t)\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}},t). \tag{20}$$

Здесь учтено соотношение

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = W(t,T)\boldsymbol{q}(t),\;\; t \in [t_0,\, T]. \tag{21}$$

Дифференциальные уравнения, определяющие закон движения для системы (1) с управлением $\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$, представим в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_1(t)\boldsymbol{x} - B_1(t)\boldsymbol{q} + B(t)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}; \tag{22}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -A_1^*(t)\boldsymbol{q} + W^{-1}(t,T)B(t)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{q}(t_0) = W^{-1}(t_0,T)\boldsymbol{x}(t_0). \tag{23}$$

В результате минимальное значение функционала $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ (10) равно

$$L(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x_0}^* K(t_0)\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{x_0}^*\boldsymbol{q}(t_0) - \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^*(t_0)W(t_0,T)\boldsymbol{q}(t_0) + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} [\boldsymbol{\varphi}^*(\tilde{\boldsymbol{x}},t)R(t)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)]\, dt. \quad (24)$$

Покажем, что состояние системы (22), (23), соответствующее управлению (11), в конечный момент времени равно нулю, т. е. $\boldsymbol{x}(T) = 0$. В дифференциальных уравнениях (22), (23) обратим их линейные дифференциальные части и представим их в виде интегральных уравнений

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t,t_0)\left(\boldsymbol{x_0} - \int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)\boldsymbol{q}(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}(\tau),\tau)\,d\tau\right); \quad (25)$$

$$\boldsymbol{q}(t) = \Phi^*(t_0,t)\left(\boldsymbol{q}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\Phi^*(\tau,t_0)W^{-1}(\tau,T)B(\tau)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}(\tau),\tau)\,d\tau\right). \quad (26)$$

Здесь $\Phi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$ — матрица; $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений системы, которая описывается однородным дифференциальным уравнением $\dot{\boldsymbol{x}} = A_1(t)\boldsymbol{x}$; матрица $A_1(t)$ имеет вид (19), а матрица

$$W(t,T) = \int\limits_{t}^{T}\Phi(t,\tau)B_1(\tau)\Phi^*(t,\tau)\,d\tau \quad (27)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (17) и невырождена при выполнении условия управляемости (6).

Из интегральных уравнений (25), (26) непосредственно находим, что состояние системы (22) удовлетворяет граничному условию $\boldsymbol{x}(T) = 0$.

Результаты, полученные для поставленной задачи, сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Для оптимальности пары* $(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}(t)) \in \Delta(t_0, T, \boldsymbol{x_0})$ *в задаче* (1)–(3), (5) *необходимо и достаточно, чтобы:*

1) $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ *удовлетворяла системе дифференциальных уравнений*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_1(t)\boldsymbol{x} - B_1(t)\boldsymbol{q} + B(t)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t), \;\; \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}; \quad (28)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -A_1^*(t)\boldsymbol{q} + W^{-1}(t,T)B(t)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{q}(t_0) = W^{-1}(t_0,T)\boldsymbol{x}(t_0); \quad (29)$$

2) *управление* $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ *определялось по формуле*

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), t, \boldsymbol{x_0}, t_0, T) = -R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{q}(t)) + \boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), t), \quad (30)$$

где матрица $K(t)$ *является решением уравнения* (16)*; функция* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ *имеет вид*

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = -\inf(0,\, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{\alpha}(t)) + \inf(0,\, \boldsymbol{\beta}(t) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)),$$
$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = -R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}(t)). \quad (31)$$

Доказательство. Необходимость следует из выражений (11)–(19). Для доказательства достаточности покажем оптимальность найденной допустимой пары $(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}(t))$, используя управление (11) и значение функционала (5). Значение функционала (5) имеет вид (24), в котором использованы решения дифференциальных уравнений (22), (23) и соотношения (20), (21).

Пусть $(\boldsymbol{x_1}(t), \boldsymbol{u_1}(t))$ — произвольная допустимая пара, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1) с граничными условиями (2). Значение функционала (5) запишем в следующем виде:

$$J(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{u_1}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x_0^*}K\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{x_0^*}\boldsymbol{q_0} - \frac{1}{2}\boldsymbol{q_0^*}W(t_0,T)\boldsymbol{q_0}+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{T}\Big[\frac{1}{2}(\boldsymbol{u_1} + R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{q}))^*R(t)(\boldsymbol{u_1} + R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{q}))+$$

$$+ (\boldsymbol{x_1} - W(t,T)\boldsymbol{q})^*(\dot{\boldsymbol{q}} + A_1^*(t)\boldsymbol{q})\Big]\,dt. \quad (32)$$

Учитывая, что $\boldsymbol{x}(t) = W(t,T)\boldsymbol{q}(t),\ \ t \in [t_0,T]$, получаем

$$J(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{u_1}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x_0^*}(K(t_0) + W^{-1}(t_0,T))\boldsymbol{x_0} + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}\big[(\boldsymbol{u_1} + R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)+$$

$$+ W^{-1}(t,T))\boldsymbol{x_1})^*R(t)(\boldsymbol{u_1} + R^{-1}(t)B^*(t)(K(t) + W^{-1}(t,T))\boldsymbol{x_1})\big]\,dt.$$

Используя значение функционала (24), (32), с учетом дифференциальных уравнений (28), (29), управления (30) и функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ (31) получаем

$$J(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{u_1}) - J(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}\Big[(\boldsymbol{u_1} + R^{-1}(t)B^*(t)(K(t) + W^{-1}(t,T))\boldsymbol{x_1})^*R(t)(\boldsymbol{u_1}+$$

$$+ R^{-1}(t)B^*(t)(K(t) + W^{-1}(t,T))\boldsymbol{x_1}) - \boldsymbol{\varphi}^*(\tilde{\boldsymbol{x}},t)R(t)\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}},t)\Big]\,dt \geq 0.$$

Следовательно, $J(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{u}}) = \inf\{J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\ \ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \in \Delta(t_0,T,\boldsymbol{x_0})\}$.

Алгоритм решения задачи на ПК. Опишем удобный для реализации на ПК алгоритм решения задачи оптимального управления (1)–(5).

1. Используя метод Рунге — Кутты, проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (16), (17) для определения матриц $K(t)$ и $W(t,T)$ в интервале $[t_0,T]$ с условиями $K(t_0) = K_0$ и $W(T,T) = 0$.

Следует отметить, что K_0 — произвольная симметричная положительно-определенная матрица размерности $n \times n$. При задании различных начальных условий $K(t_0) = K_0$ для матричного дифференциального уравнения (16) получаем различные матрицы $K(t)$ и $W(t,T)$. Однако при этом получается одна и та же вектор-функция $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ вида (30), поскольку задача имеет единственное решение. При вычислении вектор-функции $\boldsymbol{q}(t)$ по формуле (29) влияние матрицы $K(t)$ компенсируется.

2. Задать условия $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x}(T) = 0$ и вычислить $\boldsymbol{q}(t_0) = W^{-1}(t_0,T)\boldsymbol{x}(t_0)$.

3. Используя метод Рунге — Кутты, проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (28), (29) в интервале $[t_0,T]$, задав начальные условия $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{q}(t_0) = W^{-1}(t_0,T)\boldsymbol{x}(t_0)$. В процессе интегрирования системы (28), (29) необходимо выдать на печать график оптимальной траектории $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ и оптимального управления $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$. Если необходимо провести расчеты для новых значений $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$, то повторить п.п. 2, 3.

Пример. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{T}[x_1^2 + 2x_2^2 + u^2]\,dt; \quad (33)$$

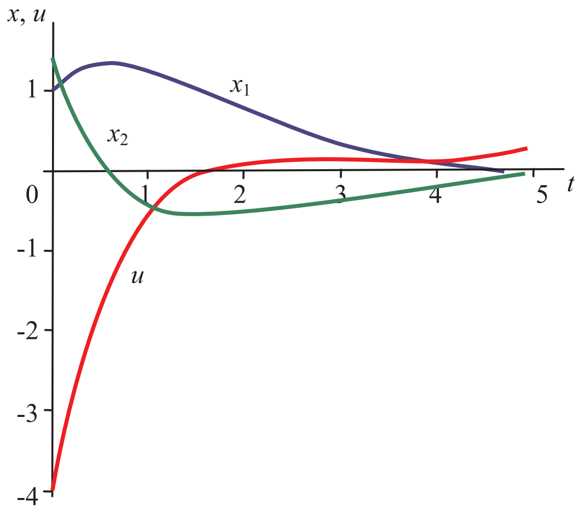

Рис. 1. График оптимального управления и оптимальных траекторий без ограничений на управления, соответствующий уравнениям (36)

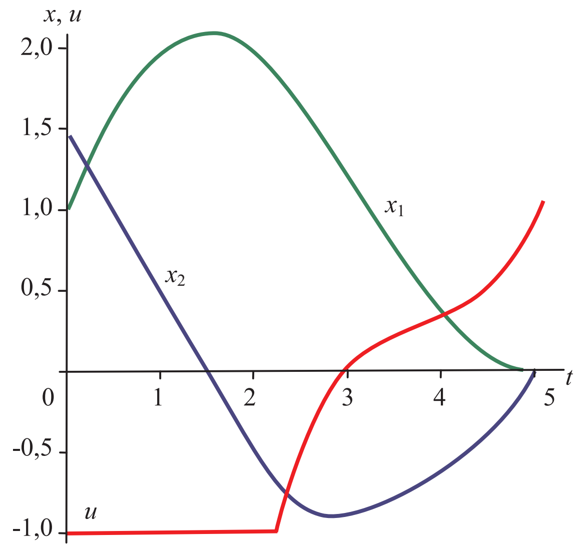

Рис. 2. График оптимального управления и оптимальных траекторий с учетом ограничений на управления, соответствующий уравнениям (37)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = \frac{3}{2}, \; x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0\,, \; T = 5; \tag{34}$$

$$|u(t)| \le 1, \;\; t \in [0, \;\; 5]. \tag{35}$$

Решение задачи без ограничений на управления. Дифференциальные уравнения с управлением, определяющие закон движения системы (34) и доставляющие минимальное значение функционалу (33), представим в следующем виде:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2, \;\; \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - q_2, \\ \dot{q}_1 = q_2, \;\; \dot{q}_2 = -q_1 + 2q_2, \\ u = -x_1 - 2x_2 - q_2, \;\; K = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{36}$$

Решение задачи с ограничением на управления вида (35). Дифференциальные уравнения с управлением, определяющие закон движения системы (34) и доставляющие минимальное значение функционалу (33), представим в следующем виде:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - q_2 + \varphi, \\ \dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = -q_1 + 2q_2 + W^{-1}\varphi, \\ u = w(x,t) + \varphi(x,t), \;\; w(x,t) = -x_1 - 2x_2 - q_2, \\ \varphi(x,t) = -\inf(0, w(x,t) + 1) + \inf(0, 1 - w(x,t)). \end{gathered} \tag{37}$$

Расчеты проводились на ПК с использованием пакета прикладных программ Maple-7, в котором реализован изложенный выше алгоритм решения задачи оптимального управления (33)–(35). На рис. 1 приведены графики оптимальных траекторий движения системы и управления без ограничений, на рис. 2 — с учетом ограничений на управления.

Заключение. Предложен новый подход построения синтезирующего управления (30), основанного на принципе обратной связи, приводящем динамическую систему в требуемое состояние за конечное время при наличии ограничений на управления. Оптимальный закон движения рассматриваемой системы с заданными граничными условиями определен в виде (28), (29). Разработан алгоритм решения задачи оптимального управления на ПК. Этот алгоритм реализован на примере (33)–(35). Полученный результат позволяет построить функцию Беллмана — Кротова в следующем виде:

$$V(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}(K(t)+W^{-1}(t,T))\boldsymbol{x}+\int\limits_t^T\Big[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda_1}(\boldsymbol{x},\tau)-\boldsymbol{\lambda_2}(\boldsymbol{x},\tau))^*R^{-1}(\tau)(\boldsymbol{\lambda_1}(\boldsymbol{x},\tau)-\boldsymbol{\lambda_2}(\boldsymbol{x},\tau))+$$
$$+\boldsymbol{\lambda_1}(\boldsymbol{x},\tau)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\alpha}(\tau))+\boldsymbol{\lambda_2}(\boldsymbol{x},\tau)(\boldsymbol{\beta}(\tau)-\boldsymbol{u})\Big]\,d\tau.$$

Список литературы

1. Красовский Н. Н., Летов А. М. К теории аналитического конструирования регулятора // Автоматика и телемеханика. 1962. Т. 23, № 6. С. 713–720.

2. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

3. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-ши. М.: Мир, 1972. 544 с.

4. Атанс М. Оптимальное управление. Введение в теорию и приложения / М. Атанс, П. Фалб. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.

5. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М.: Наука, 1976. 392 с.

6. Беллман Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Калаба. М.: Наука, 1968. 446 с.

7. Куржанский А. Б. Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 12–22.

8. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. М.: Наука, 1973. 446 с.

9. Мурзабеков З. Н. Синтез управляемых систем с ограничениями на управления // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2005. № 3. С. 44–50.

Калимолдаев Максат Нурадилович — д-р физ.-мат. наук, проф.,
директор Института проблем информатики и управления МОН РК;
тел. (727)272-37-11; e-mail: mnk@ipic.kz;
Мурзабеков Заинелхриет Нугманович — д-р техн. наук,
ведущ. науч. сотр. Института проблем информатики и управления МОН РК;
тел. (727)262-72-80; e-mail: murzabekov-zein@mail.ru;
Джусупов Арыстан Айткужаевич — д-р техн. наук, зам. директора
Института проблем информатики и управления МОН РК;
тел. (727)272-37-12; e-mail: arystan@ipic.kz;
Мурзабеков Асан Заинелхриетович — магистрант Международного
университета информационных технологий;
тел. (727)262-72-80; e-mail: a.murzabekov@gmail.com

Дата поступления — 03.12.2010