РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ ТРЕХСЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ ОТРАСЛИ

А. А. Джусупов, М. Н. Калимолдаев, З. Н. Мурзабеков, Е. В. Малишевский

Институт проблем информатики и управления Министерства образования и науки Республики Казахстан, 050010, Алма-Ата, Казахстан

УДК 330.4(075.8)

Рассмотрена математическая модель трехсекторной экономики. Для неподвижных точек трехсекторной модели построено отображение сопряжений. Предложен конструктивный метод исследования динамики нелинейной системы в окрестности положения равновесия путем преобразования к линейной системе.

Ключевые слова: трехсекторная модель отрасли, производственные фонды секторов, инвестиционные ресурсы, дифференциальные уравнения.

The mathematical model of three sector economy is considered. The interface maps for fixed points of three-sector model was constructed; and the asymptotic behavior of system solutions is reduced to the classification of their linear part.

Key words: three sector model of industry, production assets of sectors, investment resources, differential equations.

Введение. Актуальность исследования математической модели горнометаллургического производства [1] как многосвязной нелинейной динамической системы обусловлена тем, что рассматриваемая модель может быть применена при изучении переходных процессов, происходящих при смене одного варианта экономической политики другим.

В соответствии с [2] рассмотрим трехсекторную модель отрасли в абсолютных показателях, которая включает:

1) четыре линейных динамических элемента первого порядка:

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i, \quad K_i(0) = K_i^0, \quad i = 0, 1, 2, \quad \frac{dL}{dt} = \nu L, \quad L(0) = L^0; \tag{1}$$

2) три линейных распределительных элемента:

$$L = L_0 + L_1 + L_2, \quad X_1 = I_0 + I_1 + I_2, \quad (1 - a_0)X_0 = a_1 X_1 + a_2 X_2; \tag{2}$$

3) три нелинейных статических элемента:

$$X_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2. \tag{3}$$

В (1)–(3) K_i — основные производственные фонды (ОПФ) секторов; L — общее число работников, занятых в производственной сфере; ν — темп прироста числа занятых работников; L_i — число работников, занятых в i-м секторе; X_i — выпуск продукции в i-м секторе; I_i — инвестиции в i-й сектор; F_i — производственные функции в i-м секторе; a_i — прямые материальные затраты на единицу продукции i-го сектора; μ_i — коэффициент износа ОПФ i-го сектора.

Секторы трехсекторной модели экономики (1)–(3) имеют следующее назначение: материальный (нулевой) сектор производит предметы труда (топливо, электроэнергию, сырье и другие материалы); фондосоздающий (первый) — средства труда (машины, оборудование, силовые устройства, производственные здания и сооружения); потребительский — предметы потребления (продовольственные и непродовольственные товары, непроизводственные здания и сооружения, вооружение и другие предметы конечного непроизводственного назначения).

Постановка задачи. Решается следующая задача: оценить структурную устойчивость (гиперболичность) неподвижных точек для каждой области параметров (θ_i, s_i), обеспечивающих экономический рост фондовооруженности секторов.

Определение области параметров (θ_i, s_i) для обеспечения экономического роста. Пусть использованы производственные функции (3) Кобба — Дугласа

$$X_i = F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}, \quad i = 0, 1, 2, \tag{4}$$

где A_i — коэффициент нейтрального технического прогресса; α_i — коэффициент эластичности по фондам.

Обозначим через $\theta_i = L_i/L,\ s_i = I_i/X_1\,(i = 0, 1, 2)$ доли секторов в распределении трудовых и инвестиционных ресурсов (2), удовлетворяющих условиям сбалансированности

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad s_0 + s_1 + s_2 = 1, \ \ \theta_i \geq 0, \ \ s_i \geq 0. \tag{5}$$

Тогда уравнение материального баланса принимает вид

$$(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \tag{6}$$

а производственные функции (4) определяются в относительных показателях:

$$x_i = \theta_i A_i k_i^{\alpha_i}, \ \ i = 0, 1, 2, \tag{7}$$

где $x_i = X_i/L,\ k_i = K_i/L_i\,(i = 0, 1, 2)$ — производительность труда и фондовооруженность в расчете на одного занятого в i-м секторе соответственно.

Уравнения (1) для фондовооруженности секторов запишем в следующем виде:

$$\frac{dk_i}{dt} = -\lambda_i k_i + \frac{s_i}{\theta_i} x_1, \ \ \lambda_i = \mu_i + \nu, \ \ k_i(0) = \frac{K_i^0}{L_i^0} = k_i^0, \ \ i = 0, 1, 2. \tag{8}$$

Используя производственную функцию из (7), дифференциальные уравнения (8) представим в виде [2]

$$\begin{aligned} \dot{k}_0 &= -\lambda_0 k_0 + \frac{s_0}{\theta_0}\,\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}, \quad k_0(0) = k_0^0, \\ \dot{k}_1 &= -\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1}, \quad k_1(0) = k_1^0, \\ \dot{k}_2 &= -\lambda_2 k_2 + \frac{s_2}{\theta_2}\,\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}, \quad k_2(0) = k_2^0, \end{aligned} \tag{9}$$

где k_i $(i = 0, 1, 2)$ — фондовооруженность в расчете на одного занятого в i-м секторе; s_i — доли секторов в распределении инвестиционных ресурсов; θ_i — доли секторов в распределении трудовых ресурсов; λ_i, A_1, α_i $(i = 0, 1, 2)$ — заданные постоянные величины.

Стационарные положения равновесия (особые точки) для системы (9) определим из нелинейной системы уравнений

$$-\lambda_0 k_0 + \frac{s_0}{\theta_0}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0, \quad -\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0, \quad -\lambda_2 k_2 + \frac{s_2}{\theta_2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0. \tag{10}$$

Решая данную систему уравнений, получаем следующие особые точки:

$$k_1^c = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \quad k_0^c = \frac{s_0\theta_1}{\lambda_0\theta_0} A_1 (k_1^c)^{\alpha_1}, \quad k_2^c = \frac{s_2\theta_1}{\lambda_2\theta_2} A_1 (k_1^c)^{\alpha_1}. \tag{11}$$

Для обеспечения роста фондовооруженности секторов необходимо выполнение неравенства

$$\frac{dk_i}{dt} > 0, \qquad i = 0, 1, 2,$$

из которого следуют условия

$$s_0 > \frac{\lambda_0\theta_0 k_0^0}{A_1\theta_1 (k_1^0)^{\alpha_1}}, \quad s_1 > \frac{\lambda_1}{A_1}\left(k_1^0\right)^{1-\alpha_1}, \quad s_2 > \frac{\lambda_2\theta_2 k_2^0}{\theta_1 A_1 (k_1^0)^{\alpha_1}}. \tag{12}$$

Используя (11), (12), получаем

$$k_i^0 < k_i^c, \quad i = 0, 1, 2. \tag{13}$$

Следовательно, условиям (13) удовлетворяют особые точки (11), для которых матрица Якоби системы (9) принимает вид

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \dfrac{s_0\theta_1\alpha_1\lambda_1}{\theta_0 s_1} & 0 \\ 0 & -\lambda_1(1-\alpha_1) & 0 \\ 0 & \dfrac{s_2\theta_1\alpha_1\lambda_1}{\theta_2 s_1} & -\lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Если матрица A не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью, то положение равновесия $(k_0^c,\ k_1^c,\ k_2^c)$, определенное в (11), называется гиперболической, или невырожденной неподвижной точкой и асимптотическое поведение решений вблизи нее (и, следовательно, тип устойчивости) определяется при линеаризации (9).

Характеристическое уравнение для матрицы A (14) имеет вид

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda+\lambda_0 & -\dfrac{s_0\theta_1\alpha_1\lambda_1}{\theta_0 s_1} & 0 \\ 0 & \lambda+\lambda_1(1-\alpha_1) & 0 \\ 0 & -\dfrac{s_2\theta_1\alpha_1\lambda_1}{\theta_2 s_1} & \lambda+\lambda_2 \end{bmatrix} = (\lambda+\lambda_0)(\lambda+\lambda_1(1-\alpha_1))(\lambda+\lambda_2) = 0. \tag{15}$$

Так как $\lambda_i > 0,\ 0 < \alpha_1 < 1,\ i = 0,\ 1,\ 2$, то получаем отрицательные характеристические корни. Следовательно, положения равновесия $(k_0^c,\ k_1^c,\ k_2^c)$, определенные в (11), являются гиперболическими, или невырожденными неподвижными точками.

Построение отображений сопряжений для неподвижных точек трехсекторной модели. Эффективный метод исследования дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы их не решать, а преобразовывать к возможно более простому виду. Теория Пуанкаре нормальных форм указывает такие наиболее простые формы, к которым можно привести дифференциальное уравнение в окрестности положения равновесия или периодического движения.

Приведение к нормальным формам осуществляется с помощью рядов по степеням отклонения от равновесия или периодического движения. Если эти ряды сходятся, то метод нормальных форм оказывается весьма эффективным методом исследования дифференциальных уравнений: несколько первых членов ряда нередко дают информацию о поведении решений, достаточную для построения фазового портрета.

Согласно теореме Пуанкаре в классе формальных степенных рядов "нерезонансное" векторное поле может быть приведено к своей линейной части в особой точке формальным диффеоморфизмом.

Теорема 1. *Если собственные числа матрицы A являются нерезонансными, то уравнение $\dot{x} = Ax + \ldots$ формальной заменой переменной $x = y + \ldots$ приводится к линейному уравнению $\dot{y} = Ay$ (многоточия означают ряды, начинающиеся с членов выше первой степени).*

Доказательство теоремы Пуанкаре состоит в последовательном исключении членов второй, третьей и т. д. степеней в правой части. Каждый шаг основан на решении линейного гомологического уравнения.

Преобразуем дифференциальные уравнения (9), используя замену переменных

$$x_i = \frac{k_i - k_i^c}{k_i^c}, \quad i = 0,\ 1,\ 2. \tag{16}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= -\lambda_0 x_0 + \lambda_0[(x_1+1)^{\alpha_1} - 1], \quad x_0(0) = x_0^0,\\
\dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + \lambda_1[(x_1+1)^{\alpha_1} - 1], \quad x_1(0) = x_1^0,\\
\dot{x}_2 &= -\lambda_2 x_2 + \lambda_2[(x_1+1)^{\alpha_1} - 1], \quad x_2(0) = x_2^0.
\end{aligned} \tag{17}$$

В соответствии с [3] выполним преобразования дифференциальных уравнений (17) в окрестности положения равновесия. Приведение к нормальным формам осуществляется с помощью рядов по степеням отклонения от равновесия:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= -\lambda_0 x_0 + \lambda_0\Big(\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}\,\alpha_1(\alpha_1-1)x_1^2 + \frac{1}{6}\,\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)x_1^3 + \ldots\Big), \quad x_0(0) = x_0^0,\\
\dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + \lambda_1\Big(\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}\,\alpha_1(\alpha_1-1)x_1^2 + \frac{1}{6}\,\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)x_1^3 + \ldots\Big), \quad x_1(0) = x_1^0,\\
\dot{x}_2 &= -\lambda_2 x_2 + \lambda_2\Big(\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}\,\alpha_1(\alpha_1-1)x_1^2 + \frac{1}{6}\,\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)x_1^3 + \ldots\Big), \quad x_2(0) = x_2^0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Так как собственные числа матрицы A (15) являются нерезонансными, то уравнение

$$\dot{x} = Ax + \ldots \tag{19}$$

заменой переменной

$$x_i = y_i + h(y_1) = y_i + h_{i1}y_1 + h_{i2}y_1^2 + h_{i3}y_{i3}^3 + \ldots \tag{20}$$

приводится к линейному уравнению

$$\dot{y} = Ay, \tag{21}$$

где матрица A определена из линейной части (18) и имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1(1-\alpha_1) & 0 \\ 0 & \lambda_2\alpha_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Из результатов работы [4] следует, что в случае гиперболичности использование локального анализа является очень эффективным. Из теоремы Хартмана — Гробмана следует, что динамика гиперболического отображения во многом подобна динамике его линейной части.

Рассмотрим систему уравнений (18) и докажем, что вблизи гиперболической неподвижной точки отображение топологически сопряжено со своей линейной частью.

Теорема 2. *Пусть*

$$\begin{gathered} f_0(x) = -\lambda_0 x_0 + \lambda_0[(x_1+1)^{\alpha_1} - 1], \quad x = (x_0, x_1, x_2), \\ f_1(x) = -\lambda_1 x_1 + \lambda_1[(x_1+1)^{\alpha_1} - 1], \\ f_2(x) = -\lambda_2 x_2 + \lambda_2[(x_1+1)^{\alpha_1} - 1], \end{gathered} \tag{23}$$

такой C^∞*-диффеоморфизм с гиперболической неподвижной точкой* $\{0\}$*, что линейная часть* $\{f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x)\}$ *в точке* $\{0\}$ *не имеет резонансов. Тогда в некоторой окрестности точки* $\{0\}$ *диффеоморфизм* $\{f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x)\}$ C^∞*-сопряжен со своей линейной частью.*

Доказательство. Для построения сопряжений сначала рассмотрим отображение $f_1(x)$, а затем $f_0(x)$ и $f_2(x)$.

Приведем выражения (23) к нормальным формам с помощью рядов по степеням отклонения от равновесия:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= -\lambda_0 x_0 + \lambda_0(\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}\,\alpha_1(\alpha_1-1)x_1^2 + \frac{1}{6}\,\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)x_1^3 + \ldots), \\ f_1(x) &= -\lambda_1 x_1 + \lambda_1(\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}\,\alpha_1(\alpha_1-1)x_1^2 + \frac{1}{6}\,\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)x_1^3 + \ldots), \\ f_2(x) &= -\lambda_2 x_2 + \lambda_2(\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}\,\alpha_1(\alpha_1-1)x_1^2 + \frac{1}{6}\,\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)x_1^3 + \ldots). \end{aligned} \tag{24}$$

Для того чтобы получить отображение $f_1(x)$, построим сопряжение $H_1(y)$, используя замену переменных (20) $x_1 = H_1(y_1) = y_1 + h_1(y_1)$, где $h_1(y_1)$ — однородный многочлен степени $n \geq 2$.

Покажем, что равенство

$$\dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 + \lambda_1 \left(\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1-1)x_1^2 + \frac{1}{6}\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1-2)x_1^3 + \ldots\right), \ \ x_1(0) = x_1^0 \tag{25}$$

сопряжено со своей линейной частью, т. е. динамика уравнения (25) подобна динамике линейного уравнения

$$\dot{y}_1 = -\lambda_1(1-\alpha_1)y_1. \tag{26}$$

Найдем ряд

$$H_1(y_1) = y_1 + h_{12}y_1^2 + h_{13}y_1^3 + \ldots + h_{1n}y_1^n + \ldots, \tag{27}$$

где коэффициенты h_{1i} подлежат определению. Используя условие сопряженности, из уравнений (25), (26) определяем коэффициенты ряда (27)

$$h_{12} = \frac{\alpha_1}{2}, \;\; h_{13} = \frac{\alpha_1(2\alpha_1 - 1)}{6}, \; \ldots \; . \tag{28}$$

Аналогично определяем коэффициенты для $f_0(x)$. Построим сопряжение $H_0(y)$, используя замену переменных

$$x_0 = H_0(y) = y_0 + h_0(y_1), \tag{29}$$

где $h_0(y_1)$ — однородный многочлен степени $n \geq 2$.

Покажем, что равенство

$$\dot{x}_0 = -\lambda_0 x_0 + \lambda_0 \left(\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 - 1)x_1^2 + \frac{1}{6}\alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2)x_1^3 + \ldots \right), \quad x_0(0) = x_0^0 \tag{30}$$

сопряжено со своей линейной частью, т. е. динамика уравнения (30) подобна динамике линейного уравнения

$$\dot{y}_0 = -\lambda_0 y_0 + \lambda_0 \alpha_1 y_1. \tag{31}$$

Найдем ряд для (29):

$$H_0(y) = y_0 + h_{02} y_1^2 + h_{03} y_1^3 + \ldots + h_{0n} y_1^n + \ldots \tag{32}$$

(коэффициенты h_{0i} подлежат определению). Используя условие сопряженности, из уравнений (30), (31) определяем коэффициенты ряда (32)

$$h_{02} = \frac{\lambda_0 \alpha_1 (2\alpha_1 - 1)}{2(\lambda_0 - 2\lambda_1(1 - \alpha_1))}, \;\; h_{03} = \frac{\lambda_0 \alpha_1 (2\alpha_1 - 1)(3\alpha_1 - 2)}{6(\lambda_0 - 3\lambda_1(1 - \alpha_1))}, \ldots . \tag{33}$$

Аналогично определяем для $f_2(x)$. Построим сопряжение $H_2(y)$, используя замену переменных $x_2 = H_2(y) = y_2 + h_2(y_1)$, где $h_2(y_1)$ — однородный многочлен степени $n \geq 2$.

Покажем, что

$$\dot{x}_2 = -\lambda_2 x_2 + \lambda_2 \left(\alpha_1 x_1 + \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 - 1)x_1^2 + \frac{1}{6}\alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2)x_1^3 + \ldots \right), \quad x_2(0) = x_2^0 \tag{34}$$

сопряжено со своей линейной частью, т. е. динамика уравнения (34) подобна динамике линейного уравнения

$$\dot{y}_2 = -\lambda_2 y_2 + \lambda_2 \alpha_1 y_1. \tag{35}$$

Найдем ряд

$$H_2(y) = y_2 + h_{22} y_1^2 + h_{23} y_1^3 + \ldots + h_{2n} y_1^n + \ldots, \tag{36}$$

где коэффициенты h_{2i} подлежат определению. Используя условие сопряженности, из уравнений (34), (35) определяем коэффициенты ряда (36)

$$h_{22}=\frac{\lambda_2\alpha_1(2\alpha_1-1)}{2(\lambda_2-2\lambda_1(1-\alpha_1))},\;\; h_{23}=\frac{\lambda_2\alpha_1(2\alpha_1-1)(3\alpha_1-2)}{6(\lambda_2-3\lambda_1(1-\alpha_1))},\;\ldots\;. \tag{37}$$

Теорема доказана.

Найдем решение $x_1(t)$ и $y_1(t)$ и определим асимптотическое поведение решений линеаризованной системы вблизи положения равновесия из системы уравнений (17) и (26) в следующем виде [5]:

$$x_1(t)=(1+c\,\mathrm{e}^{\lambda_1(\alpha_1-1)t})^{\frac{1}{1-\alpha_1}}-1,\;\; c=(x_0+1)^{1-\alpha_1}-1; \tag{38}$$

$$y_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1(\alpha_1-1)t}y_1(0). \tag{39}$$

Решения (38), (39), связанные соотношением

$$x_1(t)=\left(1+c\frac{y_1(t)}{y_1(0)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}-1,\;\; c=(x_1(0)+1)^{1-\alpha_1}-1,\;\; y_1(0)=\frac{c}{1-\alpha_1}, \tag{40}$$

запишем в виде ряда

$$x_1(t)=y_1(t)+\frac{\alpha_1}{2}y_1^2(t)+\frac{\alpha_1(2\alpha_1-1)}{6}y_1^3(t),\;\ldots\;.$$

Отметим, что коэффициенты ряда (40) соответствуют коэффициентам (28) ряда (27).

Из системы уравнений (17) и (31) находим решение $x_0(t)$ и $y_0(t)$:

$$x_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\left(x_0(0)+\lambda_0\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\lambda_0\tau}((x_1+1)^{\alpha_1}-1)d\tau\right); \tag{41}$$

$$y_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\left(y_0(0)-\frac{\lambda_0\alpha_1 y_1(0)}{\lambda_0-\lambda_1(1-\alpha_1)}\right)+\frac{\lambda_0\alpha_1}{\lambda_0-\lambda_1(1-\alpha_1)}y_1(t). \tag{42}$$

Решения (41), (42) связаны соотношением

$$x_0(t)=y_0(t)+\frac{\lambda_0\alpha_1(2\alpha_1-1)}{2(\lambda_0-2\lambda_1(1-\alpha_1))}y_1^2(t)+\frac{\lambda_0\alpha_1(2\alpha_1-1)(3\alpha_1-2)}{6(\lambda_0-3\lambda_1(1-\alpha_1))}y_1^3(t)+\ldots, \tag{43}$$

в котором учтено соотношение (40), представленное в виде

$$(x_1(t)+1)^{\alpha_1}=\left(1+c\frac{y_1(t)}{y_1(0)}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \tag{44}$$

и начальное условие

$$y_0(0)=x_0(0)-\frac{\lambda_0\alpha_1(2\alpha_1-1)}{2(\lambda_0-2\lambda_1(1-\alpha_1))}y_1^2(0)-\frac{\lambda_0\alpha_1(2\alpha_1-1)(3\alpha_1-2)}{6(\lambda_0-3\lambda_1(1-\alpha_1))}y_1^3(0)+\ldots\;. \tag{45}$$

Отметим, что коэффициенты ряда (43), для определения которых учтены условия (44), (45), соответствуют коэффициентам (33) ряда (32).

Из системы уравнений (17), (35) находим решение $x_2(t), y_2(t)$:

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\left(x_2(0) + \lambda_2 \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\lambda_2 \tau}((x_1+1)^{\alpha_1} - 1)d\tau\right); \tag{46}$$

$$y_2(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\left(y_2(0) - \frac{\lambda_2 \alpha_1 y_1(0)}{\lambda_2 - \lambda_1(1-\alpha_1)}\right) + \frac{\lambda_2 \alpha_1}{\lambda_2 - \lambda_1(1-\alpha_1)} y_1(t). \tag{47}$$

Решения (46), (47) связаны соотношением

$$x_2(t) = y_2(t) + \frac{\lambda_2\alpha_1(2\alpha_1 - 1)}{2(\lambda_2 - 2\lambda_1(1-\alpha_1))} y_1^2(t) + \frac{\lambda_2\alpha_1(2\alpha_1-1)(3\alpha_1-2)}{6(\lambda_2 - 3\lambda_1(1-\alpha_1))} y_1^3(t) + \ldots, \tag{48}$$

в котором учтено соотношение (40), представленное в виде

$$(x_1(t)+1)^{\alpha_1} = \left(1 + c\frac{y_1(t)}{y_1(0)}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \tag{49}$$

и начальное условие

$$y_2(0) = x_2(0) - \frac{\lambda_2\alpha_1(2\alpha_1 - 1)}{2(\lambda_2 - 2\lambda_1(1-\alpha_1))} y_1^2(0) - \frac{\lambda_2\alpha_1(2\alpha_1-1)(3\alpha_1-2)}{6(\lambda_2 - 3\lambda_1(1-\alpha_1))} y_1^3(0) + \ldots . \tag{50}$$

Отметим, что коэффициенты ряда (48), для определения которых учтены условия (49), (50), соответствуют коэффициентам (37) ряда (36).

Заключение. Рассмотрена математическая модель трехсекторной экономики. Путем преобразований исходная система сведена к системе дифференциальных уравнений (17). Найдено стационарное положение равновесия (11) в определенной области параметров, обеспечивающих экономический рост фондовооруженности секторов. Показано, что локальная гладкая классификация диффеоморфизмов в окрестности гиперболической неподвижной точки сводится к классификации их линейной части.

Список литературы

1. Джусупов А. А. Разработка и исследование свойств многомерной системы НЦУ технологическим процессом окисления сернистого ангидрида в контактном аппарате: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Алма-Ата, 1983. 23 с.
2. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. М.: ЮНИТИ, 2005.
3. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевск. респ. тип., 2000.
4. Каток А. Б. Введение в современную теорию динамических систем / А. Б. Каток, Б. Хасселблат. М.: Факториал, 1999. 768 с.
5. Мурзабеков З. Н. Оптимизация управляемых систем. Алма-Ата: АТУ, 2009. 216 с.

Джусупов Арыстан Айткужаевич — д-р техн. наук, зам. директора Института проблем информатики и управления МОН РК; тел. (727)272-37-12; e-mail: arystan@ipic.kz;
Калимолдаев Максат Нурадилович — д-р физ.-мат. наук, проф., директор Института проблем информатики и управления МОН РК; тел. (727)272-37-11; e-mail: mnk@ipic.kz;
Мурзабеков Заинелхриет Нугманович — д-р техн. наук, ведущ. науч. сотр. Института проблем информатики и управления МОН РК; тел. (727)262-72-80; e-mail: murzabekov-zein@mail.ru;
Малишевский Евгений Витальевич — канд. техн. наук, проректор Алмаатинского университета энергетики и связи; e-mail: malishevskiy@hotmail.com

Дата поступления — 09.03.2010