ПОСТРОЕНИЕ ОРТОМОДУЛЯРНЫХ РЕШЕТОК ПЕРВИЧНЫХ СТРУКТУР СОБЫТИЙ

И. Б. Вирбицкайте, Е. К. Ерофеев

Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.7

Изучены взаимосвязи базовых отношений (причинной зависимости, параллелизма, альтернативного выбора (конфликта)) между событиями параллельных систем, представленных моделями первичных структур событий. В частности, предложены и исследованы техники построения ортомодулярных решеток (комбинаторного представления пространства-времени) конфигураций (вычислений) структур событий.

Ключевые слова: структуры событий, конфигурации, решетки, ортомодулярность.

The intention of the paper is to study the interconnections of basic relations (causal dependency, concurrency, and alternative choice (conflict)) between events of concurrent systems represented as prime event structures. In particular, we propose techniques for constructing orthomodular lattices of configurations, which are a space-time combinatoric representation of the behaviour of the model under consideration.

Key words: event structures, configurations, lattices, orthomodularity.

Введение. В теории параллельных систем и процессов разработан ряд абстрактных моделей (например, сети-процессы, частично упорядоченные множества, структуры событий и т. д.), предназначенных для представления и изучения поведения параллельных и распределенных систем. Известно, что существует три базовых отношения между событиями параллельных систем: причинная зависимость, параллелизм и альтернативный выбор (конфликт). Поэтому проводятся исследования в теории параллелизма с целью установления временных и пространственных взаимосвязей этих отношений. Например, в работе [1] приведен ряд "аксиом параллельности" (в частности, свойства K-плотности, N-плотности, D-непрерывности и т. д.), которые в дальнейшем изучались в контексте сетей-процессов [2–5] и частично упорядоченных множеств [6, 7], основанных на двух базовых отношениях причинной зависимости и параллелизма между событиями моделируемых систем. Полученные результаты обобщены в работе [8] на класс сетей-процессов с причинной зависимостью и недетерминированным выбором. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах [9, 10], в которых определен смысл "аксиом параллельности" в контексте более общих моделей первичных и локальных структур событий.

Альтернативным подходом к изучению взаимосвязей базовых отношений событий параллельных систем является представление семантики моделей систем в виде ортомодулярных решеток. В работе [11] исследованы ортомодулярные решетки частично упорядоченных

Работа выполнена при финансовой поддержке DFG-РФФИ (грант № 436 RUS 113/1002/01, код проекта 09-01-91334).

множеств, ассоциированных с сетями-процессами, наделенными отношениями причинной зависимости и параллелизма.

В данной работе предлагаются способы построения ортомодулярных решеток — комбинаторного представления пространства-времени — конфигураций первичных структур событий, которые являются обобщением моделей частично упорядоченных множеств и сетей-процессов и представляют собой множества событий моделируемых систем, связанных отношениями причинной зависимости, параллелизма и конфликта. Структуры событий используются для установления взаимосвязей между различными моделями параллельных процессов [12–14] и определения денотационной и операционной семантик формальных и программных языков параллельных процессов [14, 15].

1. Элементы теории множеств и теории решеток. В данном пункте приводятся некоторые базовые понятия теории множеств и теории решеток, используемых в работе.

Рассмотрим определение муровского семейства.

Определение 1. Пусть X — произвольное множество. Муровское семейство подмножеств множества X — это семейство подмножеств, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) содержит множество X;

2) содержит пересечение $\bigcap I_\alpha$, если все $I_\alpha \subseteq X$ принадлежат семейству (т. е. если оно замкнуто относительно пересечений).

Пусть X — множество. Тогда $\mathbb{P}(X)$ — множество всех подмножеств X.

Определение 2. Отображение $\mathcal{C} : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ называется оператором замыкания на X, если для всех $A \subseteq X, B \subseteq X$ выполнены следующие условия:

1) $A \subseteq \mathcal{C}(A)$;

2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B)$;

3) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = \mathcal{C}(A)$.

Множество $A \subseteq X$ называется замкнутым относительно $\mathcal{C}$, если $\mathcal{C}(A) = A$.

В работе [16] устанавливается совпадение множества замкнутых подмножеств и муровского семейства.

Теорема 1. *Подмножества множества X, замкнутые относительно некоторого оператора замыкания, образуют муровское семейство, и наоборот.*

Определение 3. Решеткой называется частично упорядоченное множество $\mathcal{L} = (L, \leqslant)$ (L — множество, "$\leqslant$" — частичный порядок), любые два элемента которого имеют точную нижнюю грань ("пересечение") и точную верхнюю грань ("объединение").

Решетка $\mathcal{L}$ называется полной, если точная нижняя и точная верхняя грани существуют для любого подмножества множества L.

Определение 4. Ортодополняемым множеством называется частично упорядоченное множество $\mathcal{P} = \langle P, \leq, 0, 1, (\centerdot)' \rangle$, содержащее минимальный и максимальный элементы, обозначенные соответственно 0 и 1, и наделенное отображением $(\centerdot)' : P \to P$, удовлетворяющим следующим условиям:

1) $(x')' = x$;

2) $x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$;

3) $x \wedge x' = 0$ и $x \vee x' = 1$.

Здесь $\vee$ — супремум по $\leq$, если такой существует, и $\wedge$ — инфимум по $\leq$, если такой существует.

Ортодополняемая решетка называется также орторешеткой.

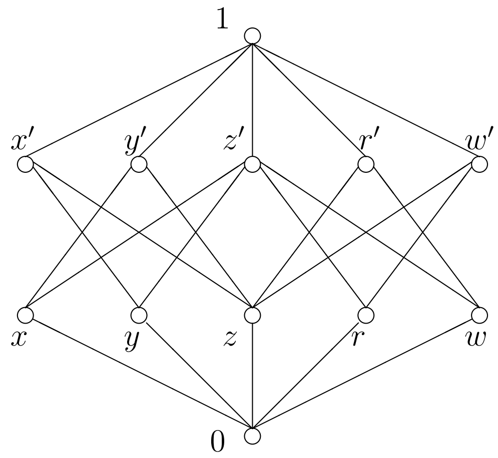

Рис. 1. Пример ортомодулярной решетки

Определение 5. Ортомодулярным множеством называется частично упорядоченное множество $\mathcal{P} = \langle P, \leq, 0, 1, (\centerdot)' \rangle$, в котором все элементы x и y из P удовлетворяют следующим условиям:

1) $(x')' = x$;

2) $x \leq y \Rightarrow (y' \leq x' \ \& \ y = x \vee (y \wedge x'))$;

3) $x \leq y' \Rightarrow x \vee y \in P$;

4) $x \wedge x' = 0$.

Условие $x \leq y \Rightarrow y = x \vee (y \wedge x')$ обычно называется ортомодулярным законом.

Пример ортомодулярной решетки приведен на рис. 1.

2. Структуры событий. В данном пункте определяются базовые понятия теории (первичных) структур событий, введенные и исследованные в работе [12] как абстрактные представления поведения безопасных сетей Петри. Структуры событий описывают параллельную систему в виде множества событий, представляющих выполнения некоторых действий. При этом для двух событий верно, что либо одно событие является причиной другого, либо одно событие исключает другое, т. е. конфликтует с ним. Два события, не связанные ни отношением причинной зависимости, ни отношением конфликта, параллельны друг другу. Поведение структур событий описывается в терминах конфигураций, т. е. множеств событий, которые произошли в системе. Также конфигурацию можно понимать как состояние, которого достигла система, после того как произошли все события из этой конфигурации.

Определение 6. Структура событий — это тройка $ES = (E, \ \preceq, \ \#)$, где:

1) E — множество событий;

2) $\preceq \subseteq E \times E$ — отношение частичного порядка (причинной зависимости), удовлетворяющее принципу конечности причин: $\forall e \in E \diamond \{d \in E \mid d \preceq e\}$ — конечное множество;

3) $\# \subset E \times E$ — симметричное иррефлексивное отношение (отношение конфликта), удовлетворяющее принципу наследования конфликта: $\forall e_1, e_2, e_3 \in E \diamond e_1 \# e_2 \preceq e_3 \Rightarrow e_1 \# e_3$.

Отношением параллелизма между событиями из множества E называется бинарное отношение $\smile = (E \times E) \setminus (\preceq \cup \succeq \cup \#)$.

В качестве примера рассмотрим структуру событий, представленную на рис. 2. Множество событий структуры включает девять событий: r, s, $\ldots$, y, z. Нетрудно заметить, что $r \prec s \prec t$, $u \prec s \prec t$, $u \prec v \prec w$, $u \prec y \prec z$ и $x \prec y \prec z$. Очевидно, что принцип конечности

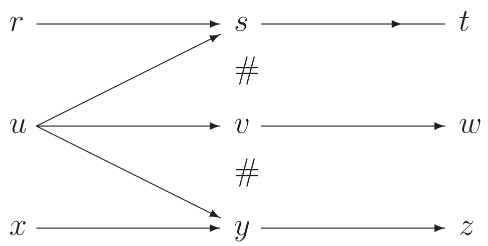

Рис. 2. Пример структуры событий

причин выполнен. Также на рис. 2 видно, что $s \# v \# y$. Из принципа наследования конфликта следует, что $s \# w$, $t \# w$, $t \# v$ и т. д. Кроме того, например, события r, u, x не являются конфликтными и не связаны причинной зависимостью, а поэтому параллельны, т. е. $r \smile u \smile x \smile r$.

Введем вспомогательные отношения на событиях $e_1 \in E,\ e_2 \in E$:

— $e_1\ co\ e_2 \iff e_1 \smile e_2 \vee e_1 = e_2$;

— $e_1\ cf\ e_2 \iff e_1 \# e_2 \vee e_1 = e_2$;

— $e_1\ li\ e_2 \iff e_1 \preceq e_2 \vee e_2 \preceq e_1$.

Заметим, что отношения li, cf, co, $\smile$ и $\#$ являются симметричными и нетранзитивными.

Структура событий функционирует, переходя из одного состояния в другое. Состояния структуры событий называются конфигурациями. Будем рассматривать два типа конфигураций: CFF-конфигурации, состоящие из событий, связанных отношениями причинной зависимости и параллелизма, и COF-конфигурации, включающие события, находящиеся в отношениях причинной зависимости и конфликта.

Определение 7. Множество $C \subseteq E$ называется:

— COF-конфигурацией, если C — левозамкнутое (т. е. $e \in C \wedge d \preceq e \Rightarrow d \in C$) и свободное от параллелизма множество (т. е. для любых $e \in C, d \in C$ верно отрицание $\neg(e \smile d)$);

— CFF-конфигурацией, если C — левозамкнутое и свободное от конфликта множество (т. е. для любых $e \in C,\ d \in C$ верно отрицание $\neg(e \# d)$).

3. Ортомодулярные решетки, порождаемые конфигурациями структур событий. В данном пункте разрабатываются и исследуются способы построения ортомодулярных решеток конфигураций структур событий. Здесь и далее (за исключением случаев, оговоренных особо) под C будем понимать $*$-конфигурацию структуры событий $ES = (E, \preceq, \#)$, где $* \in \{COF, CFF\}$.

Для $* \in \{COF, CFF\}$ определим оператор дополнения $(\centerdot)^{\perp_*} : \mathbb{P}(C) \to \mathbb{P}(C)$, действующий по следующему правилу: $\forall S \in \mathbb{P}(C) \diamond$

— $S^{\perp_{COF}} = \{x \in C \mid \forall y \in S : x \# y\}$;

— $S^{\perp_{CFF}} = \{x \in C \mid \forall y \in S : x \smile y\}$.

Обозначим $(\centerdot)'_* = ((\centerdot)^{\perp_*})^{\perp_*}$. Верным является

Предложение 1. $(\centerdot)'_*$ *является оператором замыкания на* C.

Доказательство. Проверим для $(\centerdot)'_*$ выполнение условий 1–3 определения 2 оператора замыкания. Доказательство проведем для случая COF-конфигурации (случай CFF-конфигурации доказывается аналогично).

Выберем произвольное множество $S \subseteq C$. В силу определения $S^{\perp_{COF}} = \{y \in C \mid \forall x \in S\ y \# x\}$ имеем $S'_{COF} = \{z \in C \mid \forall y \in S^{\perp_{COF}}\ z \# y\}$. Покажем, что $S \subseteq S'_{COF}$. Для элемента

$x \in S$ верно, что $x \# y$ для всех $y \in S^{\perp_{COF}}$, что является условием принадлежности x множеству $S^{\perp_{COF}}$. Таким образом, имеем $S \subseteq S'_{COF}$.

Необходимо показать, что для $A \subseteq C,\ B \subseteq C$ выполняется условие $A \subseteq B \ \Rightarrow\ A'_{COF} \subseteq B'_{COF}$. Для этого достаточно доказать, что $A \subseteq B \ \Rightarrow\ B^{\perp_{COF}} \subseteq A^{\perp_{COF}}$. Пусть $A \subseteq B$. Известно, что $A^{\perp_{COF}} = \{y \in C \mid \forall x \in A\ y \# x\}$ и $B^{\perp_{COF}} = \{t \in C \mid \forall q \in B\ t \# q\}$. Выберем $t \in B^{\perp_{COF}}$. Для всех $q \in B$ верно, что $t \# q$, а следовательно, поскольку $A \subseteq B$, для всех $x \in A$ выполняется $t \# x$. Это означает, что $t \in A^{\perp_{COF}}$. Таким образом, для $A \subseteq B$ и произвольного t верно, что если $t \in B^{\perp_{COF}}$, то $t \in A^{\perp_{COF}}$, т. е. $B^{\perp_{COF}} \subseteq A^{\perp_{COF}}$. Следовательно, $A \subseteq B \ \Rightarrow\ B^{\perp_{COF}} \subseteq A^{\perp_{COF}}$, т. е. $A \subseteq B \ \Rightarrow\ A'_{COF} \subseteq B'_{COF}$.

Необходимо доказать, что $(A'_{COF})'_{COF} = A'_{COF}$. Предположим противное: существует элемент x, такой что $x \in (A'_{COF})'_{COF}$ и $x \notin A'_{COF}$. В этом случае существует элемент $y \in A^{\perp_{COF}}$, такой что $x\ li\ y$. Из сказанного выше следует, что $A^{\perp_{COF}} \subseteq (A'_{COF})^{\perp_{COF}}$, т. е. $y \in (A'_{COF})^{\perp_{COF}}$. Тогда $x \# y$, т. е. получено противоречие. Таким образом, $(A'_{COF})'_{COF} = A'_{COF}$.

Определение 8. Множество $S \subseteq C$ называется замкнутым относительно оператора $(\boldsymbol{.})^{\perp_*}$, если $S'_* = S$.

Пусть $L_*(C)$ обозначает множество всех замкнутых (в рассматриваемом смысле) подмножеств S $*$-конфигурации C. На $L_*(C)$ определим следующие операции:

— $\bigwedge\{S_i \subseteq C : i \in I\} = \bigcap\limits_{i \in I} S_i$;

— $\bigvee\{S_i \subseteq C : i \in I\} = (\bigcup\limits_{i \in I} S_i)'_*$.

В используемых обозначениях справедлива

Лемма 1. *Пусть $S \subseteq C$. Тогда $S \wedge S^{\perp_*} = \emptyset$.*

Доказательство. Согласно определению $S \wedge S^{\perp_*} = S \cap S^{\perp_*}$. Пусть существует $x \in S \cap S^{\perp_*}$. Из определения $S^{\perp_*}$ следует, что $x \# x$ ($x \smile x$) в случае *COF*-конфигурации (*CFF*-конфигурации). Получено противоречие, поскольку отношение конфликта (параллелизма) иррефлексивно. Лемма доказана.

Рассмотрим важное свойство *CFF*-конфигураций. *CFF*-конфигурация C называется N-плотной, если для всех $x, y, v, w \in C$ выполнено следующее утверждение: если $(y \preceq x) \wedge (y \preceq v) \wedge (w \preceq v) \wedge (y \smile w \smile x \smile v)$, то существует элемент $z \in C$, такой что $(y \preceq z \preceq v) \wedge (w \smile z \smile x)$. Далее будем рассматривать только N-плотные *CFF*-конфигурации.

Для COF-конфигурации C справедлива

Лемма 2. *Пусть $x, y, z \in C$. Если $x\ li\ y$, $x\ li\ z$ и $y \# z$, то $x \prec y$ и $x \prec z$.*

Доказательство. Заметим, что возможность совпадения x с z или y исключается определением отношения $\#$. Рассмотрим остальные возможные случаи:

1. $z \prec x$. Если $y \prec x$, то $z \# y \prec x$. Из принципа "наследования конфликта" следует $z \# x$, что противоречит условию $x\ li\ z$. Если $x \prec y$, то из транзитивности отношения $\prec$ следует $z \prec y$, что противоречит условию $z \# y$.

2. $x \prec z$. В случае если $y \prec x$, из транзитивности отношения $\prec$ следует $y \prec z$, что противоречит условию $z \# y$. Следовательно, $x \prec y$.

Лемма доказана.

Далее потребуются следующие понятия и обозначения. Для $S \subseteq E$ определим его "прошлое" и "будущее" соответственно:

$$\downarrow S = \{x \in E \mid x \notin S,\ \exists y \in S:\ x \prec y\}, \ \ \uparrow S = \{x \in E \mid x \notin S,\ \exists y \in S:\ y \prec x\}.$$

Через $\downarrow S^{\perp_*}$ и $\uparrow S^{\perp_*}$ будем обозначать соответственно "прошлое" и "будущее" для множества $S^{\perp_*}$.

В используемых обозначениях справедливо

Предложение 2. *Для всех* $S \in L_*(C)$ *верны равенства* $\downarrow S = \downarrow S^{\perp_*}$ *и* $\uparrow S = \uparrow S^{\perp_*}$.

Доказательство. Доказательство проведем для COF-конфигурации C. Случай CFF-конфигурации доказывается аналогично. Пусть $S \in L_{COF}(C)$. Предположим, что $x \in \downarrow S$. Тогда существует элемент $y \in S$, такой что $x \prec y$, а значит, $x \notin S^{\perp_{COF}}$. Ясно, что существует элемент $z \in S^{\perp_{COF}}$, такой что верно отрицание $\neg(x \# z)$, поскольку в противном случае $x \in S^{\perp_{COF}\perp_{COF}} = S$. Кроме того, выполняется отрицание $\neg(x \in \uparrow S^{\perp_{COF}})$, иначе в силу транзитивности отношения $\prec$ нашлись бы элементы $q \in S$ и $r \in S^{\perp_{COF}}$, такие что $r \prec q$. Поэтому $x \in \downarrow S^{\perp_{COF}}$ и $\downarrow S \subseteq \downarrow S^{\perp_{COF}}$. Так как $S^{\perp_{COF}\perp_{COF}} = S$, то в силу тех же рассуждений $\downarrow S^{\perp_{COF}} \subseteq \downarrow S$. Для случая $x \in \uparrow S$ доказательство проводится аналогично.

Предложение доказано.

Сформулируем и докажем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть* $* \in \{COF, CFF\}$. *Тогда* $\mathfrak{L}(C) = \langle L_*(C), \subseteq, \emptyset, C, (\centerdot)^{\perp_*}\rangle$ — *ортомодулярная решетка.*

Доказательство. Пусть C — COF-конфигурация. Из теоремы о муровских семействах и определения $L_{COF}(C)$ следует, что для любых $A, B \in L_{COF}(C)$ их пересечение $A \cap B$ (по построению это точная нижняя грань) принадлежит $L_{COF}(C)$.

Проверим справедливость условий 1–4 ортомодулярности (см. определение 5).

1. Тот факт, что $(S^{\perp_{COF}})^{\perp_{COF}} = S$ для всех $S \in L_{COF}(C)$, следует из определения $L_{COF}(C)$.

2. Докажем справедливость следующего факта: $A \subseteq B \Rightarrow [B^{\perp_{COF}} \subseteq A^{\perp_{COF}}]$ и $[B = A \vee (B \wedge A^{\perp_{COF}})]$.

2.1. При доказательстве предложения 1 показано, что $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp_{COF}} \subseteq A^{\perp_{COF}}$.

2.2. Докажем справедливость следующего утверждения: $A \subseteq B \Rightarrow B = (A \vee (B \wedge A^{\perp_{COF}})) = (A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))'_{COF}$. Так как $A \subseteq B$ и $(B \cap A^{\perp_{COF}}) \subseteq B$, то $(A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}})) \subseteq B$. Поскольку из свойства 2 оператора замыкания следует, что $(A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))'_{COF} \subseteq B'_{COF}$, то, используя замкнутость множества B, получаем $(A \vee (B \wedge A^{\perp_{COF}})) \subseteq B$.

Покажем справедливость равенства $B \subseteq (A \vee (B \wedge A^{\perp_{COF}})) = (A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))'_{COF}$. Для произвольного элемента $x \in B$ рассмотрим все возможные случаи.

Ясно, что если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}})$. Используем свойство 1 оператора замыкания: $(A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}})) \subseteq (A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))'_{COF}$. Это означает, что $x \in (A \vee (B \wedge A^{\perp_{COF}}))$.

Случай, когда $x \in (B \cap A^{\perp_{COF}})$, проверяется аналогично.

Рассмотрим случай, когда $x \in B$, $x \notin A$, $x \notin A^{\perp_{COF}}$. Проверим, принадлежит ли x множеству $(A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))'_{COF}$. Поскольку $x \notin A^{\perp_{COF}}$, существует элемент $y \in A$, такой что $x \; li \; y$. Покажем, что существует элемент $z \in A^{\perp_{COF}}$, такой что $x \; li \; z$. Предположим обратное, т. е. $x \# z$ для всех $x \in A^{\perp_{COF}}$. Тогда $x \in A^{\perp_{COF}\perp_{COF}}$, а так как A — замкнутое множество, то это противоречит тому факту, что $x \notin A$. Следовательно, $x \notin (A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))^{\perp_{COF}}$. Покажем, что $x \in (A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))'_{COF}$. Предположим, что существует элемент $v \in (A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))^{\perp_{COF}}$, такой что $\neg(v \# x)$. Значит, $v \; li \; x$, т. е. либо $v \preceq x$, либо $v \succeq x$. Заметим, что $A \subseteq A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}})$. Из доказанного выше свойства следует $A^{\perp_{COF}} \supseteq (A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))^{\perp_{COF}}$. Тогда $v \in A^{\perp_{COF}}$. Значит, $v \notin B$. Так как $y \in A$ и $v \in A^{\perp_{COF}}$, то $y \# v$. В силу леммы 2 $x \prec v$. Поскольку B — замкнутое множество, $v \notin B^{\perp_{COF}\perp_{COF}}$. Значит, существует элемент $w \in B^{\perp_{COF}}$, такой что $w \; li \; v$. С учетом того что $x \in B$, согласно определению оператора дополнения верно $x \# w$. Тогда в силу принципа наследования конфликта получаем $v \# w$, поскольку $x \prec v$. Получено противоречие. Таким образом, $x \in (A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))^{\perp_{COF}\perp_{COF}}$, так как $x \# v$ для любого $v \in (A \cup (B \cap A^{\perp_{COF}}))^{\perp_{COF}}$.

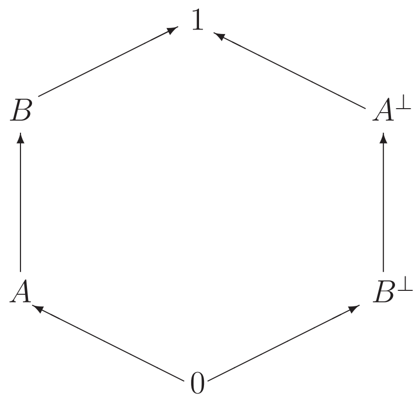

Рис. 3. Структура $\mathcal{O}_6$ из доказательства теоремы 2

3. Если $A, B \in L_{COF}(C)$ и $A \subseteq B^{\perp_{COF}}$, то согласно определению операции $\vee$ верно, что $A \vee B$ — элемент множества $L_{COF}(C)$.

4. Выполнение условия 4 определения 5 следует из леммы 1.

Рассмотрим случай, когда C является CFF-конфигурацией. Покажем, что $\mathcal{L}(C)$ — орторешетка. Для этого проверим условия 1–3 определения 4.

1. Выполнение равенства $(S^{\perp_{CFF}})^{\perp_{CFF}} = S$ для всех $S \in L_{CFF}(C)$ следует из определения $L_{CFF}(C)$.

2. Тот факт, что если $A \subseteq B$, то $B^{\perp_{CFF}} \subseteq A^{\perp_{CFF}}$, следует из предложения 1.

3. Из леммы 1 следует, что для любого $S \in L_{CFF}(C)$ выполнено равенство $S \wedge S^{\perp_{CFF}} = \emptyset$. Остается показать, что для всех $S \in L_{CFF}(C)$ верно равенство $S \vee S^{\perp_{CFF}} = C$, а для этого достаточно, чтобы выполнялось условие $(S \cup S^{\perp_{CFF}})^{\perp_{CFF}} = \emptyset$. Если существует элемент $q \in (S \cup S^{\perp_{CFF}})^{\perp_{CFF}}$, то для всех $x \in S$ имеем $q \smile x$. Это означает, что $q \in S^{\perp_{CFF}}$. Однако известно, что $q \in (S \cup S^{\perp_{CFF}})^{\perp_{CFF}}$. Следовательно, $q \smile q$, т. е. получено противоречие.

Используем свойство, установленное в [17]: если $\mathcal{O}_6$ (рис. 3) не является подалгеброй в орторешетке, то такая решетка является ортомодулярной. Выберем элементы $A, B \in L_{CFF}(C)$, такие что $A \subset B$, и покажем, что $B \wedge A^{\perp_{CFF}} \neq \emptyset$.

Поскольку $A \subset B$, существует $b \in B \setminus A$. Если $b \in (B \wedge A^{\perp_{CFF}})$, то $B \wedge A^{\perp_{CFF}} \neq \emptyset$ и $\mathcal{L}(C)$ — ортомодулярная решетка. Пусть $b \notin B \wedge A^{\perp_{CFF}}$, т. е. $b \in B \setminus (A \cup A^{\perp_{CFF}})$, а следовательно, существует элемент $a \in A$, такой что $a\ li\ b$. Пусть $b \prec a$. В силу предложения 2 $\downarrow A = \downarrow A^{\perp_{CFF}}$, а значит, существует элемент $d \in A^{\perp_{CFF}}$, такой что $b \prec d$. Если $d \in B^{\perp_{CFF}}$, то получаем противоречие, поскольку $b \in B$. Таким образом, $d \in A^{\perp_{CFF}} \setminus B^{\perp_{CFF}}$.

Если $d \in B \wedge A^{\perp_{CFF}}$, то $B \wedge A^{\perp_{CFF}} \neq \emptyset$. Это означает, что результат получен. Пусть $d \notin B \wedge A^{\perp_{CFF}}$, т. е. $d \in A^{\perp_{CFF}} \setminus (B \cup B^{\perp_{CFF}})$. Из предложения 2 следует, что $\uparrow B = \uparrow B^{\perp_{CFF}}$, а значит, существует элемент $g \in B^{\perp_{CFF}}$, такой что $g \prec d$. Тогда в силу свойства N-плотности для a, b, g, d существует элемент $h \in C$, такой что $b \prec h \prec d$, $a \smile h$, $h \smile g$. Если $h \in B \cap A^{\perp_{CFF}}$, то результат получен. В противном случае верно либо $h \in B \setminus A^{\perp_{CFF}}$, либо $h \in A^{\perp_{CFF}} \setminus B$.

Рассмотрим случай, когда $h \in B \setminus A^{\perp_{CFF}}$. Так как $h \notin A^{\perp_{CFF}}$, то существует элемент $a_1 \in A$, такой что $a_1\ li\ h$. При этом $h \prec a_1$, поскольку $h \prec d \in A^{\perp_{CFF}}$. В силу свойства N-плотности

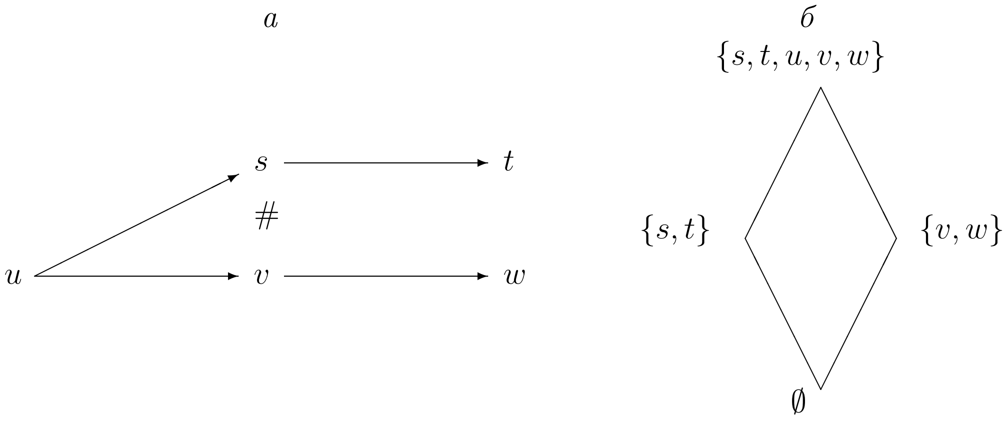

Рис. 4. Пример *COF*-конфигурации (*а*) и ее ортомодулярной решетки (*б*)

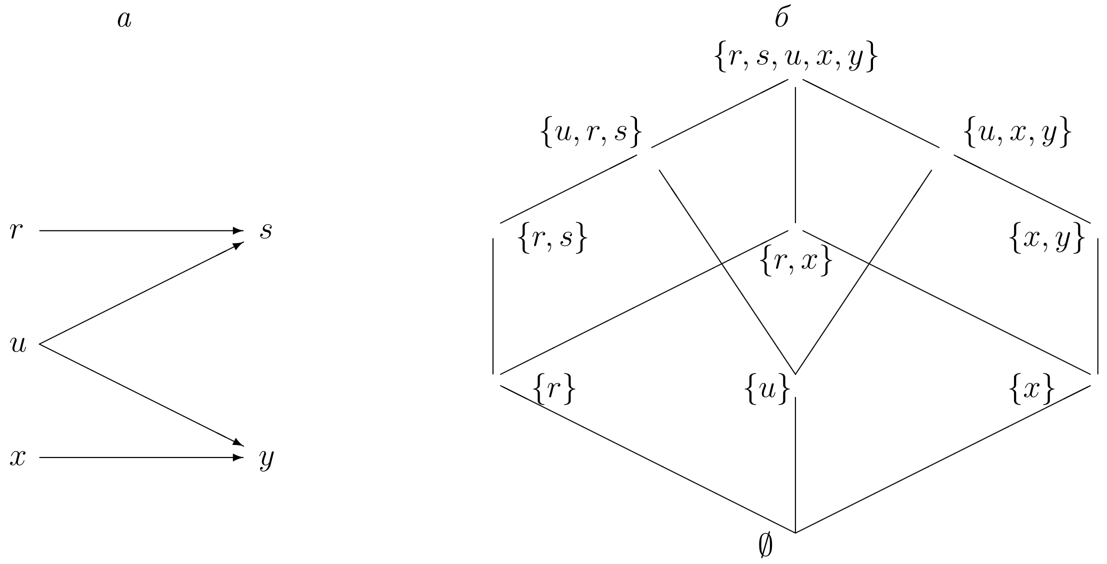

Рис. 5. Пример *CFF*-конфигурации (*а*) и ее ортомодулярной решетки (*б*)

для h, a_1, g, d существует элемент $h_1 \in C$, такой что $a \smile h_1 \smile g$, $h \prec h_1 \prec d$. В случае если $h_1 \in B \cap A^{\perp_{CFF}}$, результат получен. Если $h_1 \in A^{\perp_{CFF}}$, то с учетом предложения 2 и того факта, что $h_1 \in \uparrow B$, верно, что $h_1 \in B^{\perp_{CFF}}$. Это означает, что существует элемент $g_1 \in B^{\perp_{CFF}}$, такой что $g_1 \prec h_1$. Если $h_1 \in B$, то, учитывая, что $h_1 \in \downarrow A^{\perp_{CFF}}$, получаем $h_1 \in \downarrow A^{\perp_{CFF}}$. Это означает, что существует элемент $a_2 \in A$, такой что $h_1 \prec a_2$. Рассуждая аналогично, в силу свойства N-плотности и принципа конечности причин получаем, что в цепочке $b \prec \ldots \prec d$ существует элемент из множества $B \cup A^{\perp_{CFF}}$, а значит, $\mathcal{O}_6$ (см. рис. 3) не является подалгеброй в решетке $\mathcal{L}(C)$. Таким образом, $\mathcal{L}(C)$ — ортомодулярная решетка.

Теорема доказана.

В COF-конфигурации $\{s,t,u,v,w\}$, показанной на рис. 4,*а*, замкнуты множества событий $\emptyset$, $\{s,t,u,v,w\}$, $\{s,t\}$, $\{v,w\}$. При этом $\{s,t\}^{\perp_{COF}} = \{v,w\}$ и $\{v,w\}^{\perp_{COF}} = \{s,t\}$. На рис. 4,*б* показана ортомодулярная решетка данной COF-конфигурации.

В приведенной на рис. 5,*а* CFF-конфигурации r,s,u,x,y замкнутыми являются множества $\{r\}^{\perp_{CFF}} = \{u,x,y\}$, $\{u\}^{\perp_{CFF}} = \{r,x\}$, $\{x\}^{\perp_{CFF}} = \{u,r,s\}$, $\{r,s\}^{\perp_{CFF}} = \{x,y\}$ и $\{r,s,u,x,y\}^{\perp_{CFF}} = \emptyset$. На рис. 5,*б* показана ортомодулярная решетка этой CFF-конфигурации.

Заключение. Для моделей первичных структур событий разработано комбинаторное пространственно-временное представление их поведения в терминах ортомодулярных решеток, что позволяет изучать взаимосвязи базовых отношений (причинной зависимости, параллелизма, конфликта) между событиями параллельных процессов, протекающих в реальных параллельных системах. В дальнейшем предполагается распространить полученные результаты на обобщение первичных структур событий — локальные структуры событий.

Список литературы

1. Petri C. Concurrency as a basis for system thinking / St. Augustin: Gesellschaft für Mathematik und Detenverarbeitung. ISP-Rep. 1978. V. 78, N 06.

2. Best E. The relative strength of K-density // Lecture Notes Comput. Sci. 1980. V. 84. P. 261–276.

3. Best E. A theorem on the characteristics of non-sequential processes // Fund. Inform. 1980. V. 3. P. 77–94.

4. Fernandez C., Thiagarajan P. S. D-continuous causal nets: A model of non-sequential processes // Theoret. Comput. Sci. 1984. V. 28. P. 171–196.

5. Kummer O., Stehr M.-O. Petri's axioms of concurrency — a selection of recent results // Lecture Notes Comput. Sci. 1997. V. 1248. P. 195–214.

6. Best E., Fernandez C., Plünnecke H. Concurrent systems and processes. / GMD, Sankt Augustin, FDR. Final Report on the Foundational Part of the Project BEGRUND. FMP-Studien. 1985. V. 107.

7. Plünnecke H. K-density, N-density and finiteness properties // Lecture Notes Comput. Sci. 1984. V. 188. P. 392–412.

8. Cherkasova L. A., Kotov V. E. Descriptive and analytical process algebras // Lecture Notes Comput. Sci. 1989. V. 424. P. 77–104.

9. Virbitskaite I. Some characteristics of nondeterministic processes // Parallel Proc. Lett. 1993. V. 3, N 1. P. 99–106.

10. Virbitskaite I., Bozhenkova E. Unified characterization of some properties of event structures // RISC-Linz Report Series. 1994. V. 94–48. P. 29–32.

11. Bernardinello L., Pomello L., Rombola S. Closure operators and lattices derived from concurrency in posets and occurrence nets // Fund. Inform. 2010. V. 105, N 3. P. 211–235.

12. Nielsen M., Plotkin G., Winskel G. Petri nets, event structures and domains // Theor. Comput. Sci. 1981. V. 13, N 1. P. 85–108.

13. Nielsen M., Rozenberg G., Thiagarajan P. S. Behavioural notions for elementary net systems // Distributed Comput. 1990. V. 4, N 1. P. 45–57.

14. Winskel G. Events in computation: PhD thesis. Edinburgh, 1980.

15. Darondeau Ph., Degano P. Event structures, causal trees, and refinement // Lecture Notes Comput. Sci. 1990. V. 452. P. 239–245.

16. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

17. Kalmbach G. Orthomodular lattice. N. Y.: Academ. Press, 1983.

Вирбицкайте Ирина Бонавентуровна — д-р физ.-мат. наук, проф.,
гл. науч. сотр. Института систем информатики СО РАН; e-mail: virb@iis.nsk.su;
Ерофеев Евгений Константинович — магистрант Новосибирского
государственного университета; e-mail: eugnke@gmail.com

Дата поступления — 30.01.12 г.