КОЛИЧЕСТВО АЛЬТЕРНАТИВ В АЛГОРИТМЕ КОНКУРЕНЦИИ

В. С. Антюфеев

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.6[1]

Рассмотрен новый решающий алгоритм конкуренции, функционирование которого подобно функционированию искусственной нейронной сети. Доказана теорема обучения для этого алгоритма. Новый решающий алгоритм позволяет выбирать одну из двух альтернатив: выполняется или не выполняется некоторое событие. Предложена модификация алгоритма конкуренции, позволяющая выбирать одну из любого количества альтернатив. Доказана теорема обучения для модифицированного алгоритма.

Ключевые слова: искусственная нейронная сеть, алгоритм конкуренции, альтернативы.

A new decision algorithm is considered. Its functioning reminds of artificial network. A training theorem was proved for this algorithm. The decision algorithm makes possible to tell the difference between two alternatives: whether an event occurres or not. A modification of this competition algorithm is proposed in this work, making possible to distinguish between any number of alternatives. A training theorem is proved for this modification.

Key words: artificial neural network, competition algorithm, alternatives.

Введение. Задачи распознавания решаются с помощью искусственных нейронных сетей (ИНС), созданных в 50–60-х гг. XX в. ИНС — это логические алгоритмы, функционирование которых подобно работе мозга. В настоящее время ИНС имеют многочисленные применения. В этой области проведено большое количество исследований. Однако некоторые задачи не решаются с помощью ИНС. Сложность алгоритмов ИНС затрудняет их практическое и теоретическое исследование. В частности, для ИНС до сих пор не доказана важная теорема обучения.

В работе [1] предложен решающий алгоритм конкуренции, в котором не используются понятия нейрона, сети, весов. Этот алгоритм позволяет решать задачи того же типа, которые решаются с помощью ИНС. Однако обучение и работа этого алгоритма основаны на других принципах. Использование этих новых принципов позволило существенно упростить алгоритм. В частности, оказалось возможным применить к исследованию нового решающего алгоритма методы математического анализа, теории вероятностей. Это позволило доказать соответствующую теорему обучения [2], которая не доказана для многослойных ИНС.

Немодифицированный алгоритм конкуренции позволяет различать лишь две альтернативы: $\{\mathbf{z} \in \boldsymbol{X}\}$ и $\{\mathbf{z} \in \boldsymbol{Y}\}$ ($\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ — неизвестное множество и его дополнение соответственно), но для решения многих практических задач нужно уметь различать большее количество взаимоисключающих альтернатив. Например, имеются результаты медицинского обследования

[1]Работа выполнена в рамках Межинтеграционной программы СО РАН (проект № 47).

и предполагается, что пациент находится в одном из трех состояний: болен гриппом (альтернатива $\boldsymbol{U}$); болен ОРВИ (альтернатива $\boldsymbol{V}$); здоров (альтернатива $\boldsymbol{W}$). Для решения этого вопроса с помощью нейронных сетей в работе [4] предложены так называемые самоорганизующиеся карты. Особенность этого подхода состоит в том, что обучение сети (подстройка весов) происходит без ответов “учителя”. Для того чтобы разделить конечное множество точек на кластеры, сеть определенным образом оценивает и сравнивает “расстояния” между точками множества.

В настоящей работе предлагается простое обобщение метода конкуренции, позволяющее различать любое количество альтернатив.

Ниже используются термины и обозначения из работ [1, 2].

1. Исследование работы алгоритма конкуренции. Для упрощения изложения ниже будем рассматривать три альтернативы: $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$. Формальная постановка задачи имеет следующий вид: пусть множество $\boldsymbol{Z}$ разбито на подмножества $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$:

$$\boldsymbol{U} \cap /\!\!\!\boldsymbol{V} = \varnothing, \quad \boldsymbol{V} \cap /\!\!\!\boldsymbol{W} = \varnothing, \quad \boldsymbol{U} \cap /\!\!\!\boldsymbol{W} = \varnothing, \quad \boldsymbol{U} \cup /\!\!\!\boldsymbol{V} \cup /\!\!\!\boldsymbol{W} = \boldsymbol{Z}.$$

Требуется определить, какому подмножеству принадлежит произвольная точка $\mathbf{z} \in /\!\!\!\boldsymbol{Z}$.

Проанализируем работу алгоритма конкуренции и выясним, какие изменения следует выполнить, чтобы решить задачу с тремя альтернативами, не меняя принципиально схему алгоритма конкуренции.

Работа алгоритма конкуренции начинается с процесса обучения [1]. Моделируем конечную последовательность случайных обучающих сигналов $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^N \in /\!\!\!\boldsymbol{Z}$. В исходной схеме с двумя альтернативами учитель сообщает для каждого $k = 1, \ldots, N$, какое из утверждений

$$\{\mathbf{z}^k \in /\!\!\!\boldsymbol{X}\}/ \text{ или } \quad \{\mathbf{z}^k \in /\!\!\!\boldsymbol{Y}\}/$$

является верным. Чтобы перейти к схеме с тремя альтернативами, достаточно заменить эту пару ответов на тройку взаимоисключающих ответов:

$$\{\mathbf{z}^k \in /\!\!\!\boldsymbol{U}\}, \quad \text{или} \quad \{\mathbf{z}^k \in /\!\!\!\boldsymbol{V}\}, \quad \text{или} \quad \{\mathbf{z}^k \in /\!\!\!\boldsymbol{W}\}.$$

В “память” процесса записывается следующая информация о расположении точек-сигналов: 1) координаты точки $\mathbf{z}^k$; 2) значение индикатора ε в точке $\mathbf{z}^k$. В алгоритме с двумя альтернативами функция-индикатор задана следующим образом:

$$\varepsilon(\mathbf{z}^k) = \begin{cases} +1, & \mathbf{z}^k \in /\!\!\!\boldsymbol{X}, \\ -1, & \mathbf{z}^k \in /\!\!\!\boldsymbol{Y}. \end{cases}$$

Значение индикатора $\varepsilon(\mathbf{z}^k)$ позволяет определить, которому из множеств $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ принадлежит точка $\mathbf{z}^k$.

В рассматриваемой задаче имеется три варианта ответа учителя: $\{\mathbf{z} \in /\!\!\!\boldsymbol{U}\}$, $\{\mathbf{z} \in /\!\!\!\boldsymbol{V}\}$, $\{\mathbf{z} \in /\ \boldsymbol{W}\}$, поэтому представляется естественным, что индикатор ε также должен принимать три значения, которые следует сопоставить с тремя ответами. Вернемся к анализу работы алгоритма конкуренции с двумя альтернативами и выясним, каким образом значения индикаторов используются в его работе.

Итак, пусть информация об обучающих сигналах записана, процесс обучения закончен и произошел переход в рабочий режим, т. е. в режим распознавания. В схеме с двумя альтернативами каждому из обучающих сигналов $\mathbf{z}^k$ ставится в соответствие так называемая элементарная функция влияния этого сигнала [1] — распределение вида

$$h_{\mathbf{z}^k}(\mathbf{z}) = \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{z}^k|^m}.$$

Это распределение описывает "влияние" обучающего сигнала $\mathbf{z}^k$ на точку $\mathbf{z}$. Конечному множеству сигналов $\boldsymbol{z} = \{\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^N\}$ поставим в соответствие функцию влияния этого множества [1] на точку $\mathbf{z}$:

$$H_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(\mathbf{z}^k)\ h_{\mathbf{z}^k}(\mathbf{z}).$$

Построив функцию влияния $H_{\boldsymbol{z}}$, строим вспомогательную решающую функцию $f_{\boldsymbol{z}}$ [1]: $f_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) = F(H_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}))$. Напомним, что значение решающей функции $f_{\boldsymbol{z}}$ в точке $\mathbf{z}$ — эвристическая вероятность события $\{\mathbf{z} \in \boldsymbol{X}\}$. Поэтому можно сделать следующие выводы:

$$\begin{array}{l} \text{из } \{f_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) > 1/2\} \text{ следует } \{\mathbf{z} \in \boldsymbol{X}\}, \\ \text{из } \{f_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) \leq 1/2\} \text{ следует } \{\mathbf{z} \in \boldsymbol{Y}\}. \end{array}$$

Один из этих выводов является решением задачи. Заметим, что значения функций $H_{\boldsymbol{z}}, f_{\boldsymbol{z}}$ зависят от значений индикатора ε ($+1$ или -1). Однако неясно, каким образом следует переопределить значения индикатора, чтобы новые значения решающей функции $f_{\boldsymbol{z}}$ позволяли получить решение задачи с тремя альтернативами.

Изменим алгоритм таким образом, чтобы исключить индикатор. Согласно определению функций $H_{\boldsymbol{z}}, F, f_{\boldsymbol{z}}$ [1] два последних вывода эквивалентны выводам

$$\begin{array}{l} \text{из } \{H_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) > 0\} \text{ следует } \{\mathbf{z} \in \boldsymbol{X}\}, \\ \text{из } \{H_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) \leq 0\} \text{ следует } \{\mathbf{z} \in \boldsymbol{Y}\}. \end{array}$$

Последние неравенства также имеют простой эвристический смысл. Например, неравенство $H_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) > 0$ означает [1], что значение функции влияния положительных сигналов из множества $\boldsymbol{z}$ в точке $\mathbf{z}$ превышает значение функции влияния отрицательных сигналов.

Как сказано выше, для задачи с тремя альтернативами трудно (или невозможно) назначить три значения индикатора ε. Однако, для того чтобы решить задачу с двумя альтернативами, достаточно получить ответ: "значение функции влияния положительных сигналов превышает значение функции влияния отрицательных сигналов". Для этого не нужно строить решающую функцию $f_{\boldsymbol{z}}$, совокупную функцию влияния $H_{\boldsymbol{z}}$ для всего множества $\boldsymbol{z}$ и определять значения индикаторов $\varepsilon(\mathbf{z}^k)$.

Действительно, для задачи с двумя альтернативами по определению [1, 2]

$$H_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) = \sum h_{x^i}(\mathbf{z}) - \sum h_{y^j}(\mathbf{z}) = H_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}) - H_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{z}),$$

и неравенство $H_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) > 0$ эквивалентно неравенству $H_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}) > H_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{z})$. Чтобы проверить, выполняется ли последнее неравенство, достаточно вычислить лишь значения функций $H_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}), H_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{z})$ для множеств $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, а индикатор ε можно исключить.

С учетом сказанного выше можно построить модифицированный алгоритм конкуренции для задачи с тремя альтернативами.

2. Модификация схемы алгоритма конкуренции. Вернемся к задаче с тремя альтернативами. Итак, пусть смоделированы случайные обучающие точки-сигналы $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^N \in \boldsymbol{Z}$. Для каждой точки $\mathbf{z}^k$ учитель сообщает, в какое из множеств $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ она попала. В соответствии с этой информацией разобьем конечное множество обучающих сигналов $\boldsymbol{z} = \{\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^N\}$ на непересекающиеся подмножества

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} \cap \boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{z} \cap \boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{z} \cap \boldsymbol{W},$$

после чего образуем три функции влияния $H_{\boldsymbol{u}}, H_{\boldsymbol{v}}, H_{\boldsymbol{w}}$ для множеств $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ и перейдем в рабочий режим. Для произвольной точки $\mathbf{z}$ вычислим значения $H_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{z}),\ H_{\boldsymbol{v}}(\mathbf{z}),\ H_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{z})$ этих функций и найдем наибольшее из этих чисел. Пусть, например,

$$H_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{z}) = \max(H_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{z}), H_{\boldsymbol{v}}(\mathbf{z}), H_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{z})).$$

Это соотношение имеет следующий эвристический смысл. Обучающие сигналы из множеств $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ оказывают конкурентное влияние на точку $\mathbf{z}$, “стремясь” присоединить ее к своим множествам. Последнее соотношение показывает, что наиболее существенное влияние оказывают сигналы из множества $\boldsymbol{u}$. Поэтому степень уверенности [1] в истинности события $\{\mathbf{z} \in \boldsymbol{U}\}$ является наибольшей, и можно сделать вывод: $\mathbf{z} \in \boldsymbol{U}$.

Очевидно, что данная схема вычислений может быть использована для любого количества альтернативных множеств.

Ниже приведено доказательство теоремы обучения для модифицированного алгоритма.

3. Теорема обучения. В данном пункте доказано, что если выбирать обучающие сигналы в $\boldsymbol{Z}$ специальным образом, то алгоритм конкуренции может быть обучен “сколь угодно хорошо” при достаточно большом числе N обучающих сигналов. Иными словами, достаточно длительное обучение позволяет сделать долю верных ответов сколь угодно близкой к единице.

Пусть по-прежнему $\boldsymbol{z} = \{\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^N\}$ — некоторое конечное множество случайных точек. Для доказательства теоремы обучения необходима еще одна вспомогательная функция — осредненная функция влияния множества $\boldsymbol{z}$ [2]

$$\overline{H}_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z}) = \frac{h_{\mathbf{z}^1}(\mathbf{z}) + h_{\mathbf{z}^2}(\mathbf{z}) + \ldots + h_{\mathbf{z}^k}(\mathbf{z})}{N}.$$

Сделаем несколько замечаний относительно этой функции.

Замечание 1. Поскольку функция $\overline{H}$ зависит от множества $\boldsymbol{z}$, она неявно зависит и от количества $N \equiv |\boldsymbol{z}|$ точек этого множества.

Замечание 2. Точки $\mathbf{z}^k$ являются случайными, следовательно, значения функции $\overline{H}$ также являются случайными.

Замечание 3. Каждая из функций $h_{\mathbf{z}^k}$ не определена в соответствующей точке $\mathbf{z} = \mathbf{z}^k$, поэтому функция $\overline{H}_{\boldsymbol{z}}$ не определена во всех обучающих точках-сигналах $\mathbf{z}^k,\ k = 1, 2, \ldots, N$.

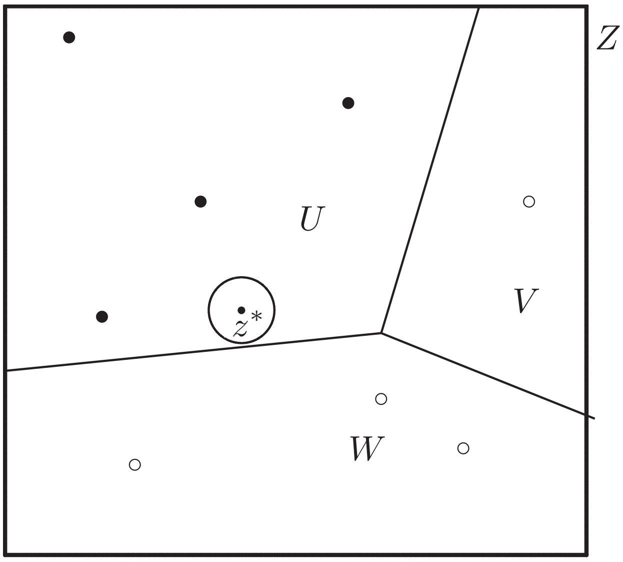
Замечание 4. Поскольку значения функций $h_{\mathbf{z}^k}$ положительны, значения функции $\overline{H}_{\boldsymbol{z}}$ также положительны.

Замечание 5. Функция $\overline{H}_{\boldsymbol{z}}$ фактически зависит от точки $\mathbf{z}$ и от конечного множества $\boldsymbol{z}$ (множество $\boldsymbol{z}$ — параметр; точка $\mathbf{z}$ — аргумент функции). Не меняя обозначение, вместе с функцией $\overline{H}_{\boldsymbol{z}}$ будем рассматривать функцию $\overline{H}_{\mathbf{z}}$: $\overline{H}_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{z}) \equiv \overline{H}_{\boldsymbol{z}}(\mathbf{z})$. Конечное множество $\boldsymbol{z}$ — аргумент этой функции ($\overline{H}_{\mathbf{z}}$ — положительная мера), а точка $\mathbf{z}$ — ее параметр. Из определения следует, что для функции $\overline{H}_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{z})$ выполняется свойство аддитивности меры

$$\overline{H}_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{x} \cup \boldsymbol{y}) = \overline{H}_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{x}) + \overline{H}_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{y}), \quad \text{если} \quad \boldsymbol{x} \cap \boldsymbol{y} = \varnothing.$$

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

— множество $\boldsymbol{Z} \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры разбито на p взаимно непересекающихся подмножеств $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_p$:



Разбиение множества $\boldsymbol{Z}$

$$\boldsymbol{U}_i \cap \boldsymbol{U}_j = \varnothing, \quad \boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{U}_p = \boldsymbol{Z};$$

— $\boldsymbol{z} = \{\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^N\}$ — *конечное множество случайных взаимно независимых точек, равномерно распределенных на множестве* $\boldsymbol{Z}$;

— *множество* $\boldsymbol{z}$ *также разбито на p соответствующих подмножеств* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p$: $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{z} \cap \boldsymbol{U}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$;

— $\mathbf{z}^* \in \boldsymbol{Z}$ — *произвольная точка, принадлежащая одному из множеств разбиения* $\boldsymbol{U}_i$ *вместе с окрестностью* $(\mathbf{z}^* \in \mathrm{Int}(\boldsymbol{U}_i))$.

Тогда в пределе при $N \to \infty$ *выполняется соотношение*

$$\overline{H}_{\boldsymbol{u}i}(\mathbf{z}^*) = \max_{k=1,2,\ldots,N}(\overline{H}_{\boldsymbol{u}_k}(\mathbf{z}^*)). \tag{1}$$

Иными словами, если выполняются условия теоремы, то при всех достаточно больших значениях N *выполняется соотношение* (1), *которое позволяет определить, в каком из множеств* $\boldsymbol{U}_k$ *находится точка* $\mathbf{z}^*$.

Доказательство. Сведем рассматриваемую задачу к уже решенной задаче с двумя альтернативами. Рассмотрим непрерывные множества $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}_i, \quad \boldsymbol{Y} = \bigcup_{k \neq i} \boldsymbol{U}_k$$

и соответствующие дискретные конечные множества

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} \cap \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \cap \boldsymbol{Y}.$$

Для множеств $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ выполняются условия теоремы обучения для двух альтернатив [2]. Согласно доказательству теоремы для функций $\overline{H}_{\boldsymbol{x}}$, $\overline{H}_{\boldsymbol{y}}$ выполняются следующие два утверждения:

— функция влияния $\overline{H}_{\boldsymbol{x}}$ неограничена сверху:

$$\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) \xrightarrow{p} \infty, \quad N \equiv |\boldsymbol{z}| \to +\infty. \tag{2}$$

Имеется в виду сходимость к бесконечности по вероятности. Иными словами, для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и произвольного сколь угодно большого $A > 0$ найдется N_0, такое что при $N > N_0$ с вероятностью, большей $1-\varepsilon$, выполняется соотношение $\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > A$.

— функция влияния $\overline{H}_{\boldsymbol{y}}$ ограничена сверху:

$$\sup_N \overline{H}_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{z}^*) \le C \tag{3}$$

($C < \infty$ — константа, не зависящая от числа сигналов N).

Константу $A > 0$ можно выбрать произвольно. Выберем $A > C$, тогда из соотношений (2), (3) следует, что для заданного ε и достаточно больших N с вероятностью, большей $1-\varepsilon$, выполняется двойное неравенство $\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > C \ge \overline{H}_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{z}^*)$ или $\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > \overline{H}_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{z}^*)$. Это утверждение можно кратко записать в терминах теории вероятности:

$$P\{\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > \overline{H}_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{z}^*)\} > 1-\varepsilon. \tag{4}$$

Согласно определению множества $\boldsymbol{y}$ и свойству аддитивности меры для функции $\overline{H}_{\boldsymbol{y}}$ имеем

$$\overline{H}_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{z}^*) \equiv \overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k\ne i} \overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k).$$

С учетом этого выражения запишем левую часть (4):

$$P\left\{\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > \overline{H}_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{z}^*)\right\} = P\left\{\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > \sum_{k\ne i} \overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k)\right\}.$$

Поскольку в этом соотношении все значения $\overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k) > 0$ (см. замечание 4), из неравенства

$$\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > \sum_{k\ne i} \overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k) \tag{5}$$

следуют неравенства

$$\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > \overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k) \quad \forall k \ne i. \tag{6}$$

Из события (5) следует событие (6), поэтому из (4) и (6) следуют неравенства для вероятностей

$$P\left\{\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > \overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k)\right\} \ge P\left\{\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > \sum_{k\ne i} \overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k)\right\} > 1-\varepsilon$$

или

$$P\left\{\overline{H}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{z}^*) > \overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k)\right\} > 1-\varepsilon.$$

Запишем последнее неравенство, заменив согласно определению $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{u}_i$:

$$P\left\{\overline{H}_{\boldsymbol{u}i}(\mathbf{z}^*) > \overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k)\right\} > 1-\varepsilon. \tag{7}$$

Полученное неравенство имеет следующий формальный смысл: для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется N_0, такое что при $N > N_0$ неравенство (5) выполняется с вероятностью, большей $1-\varepsilon$, т. е. выполняется предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\overline{H}_{\boldsymbol{u}_i}(\mathbf{z}^*) > \max_{k=i}(\overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k)\right\} = 1.$$

Иными словами, при достаточно больших значениях N вероятность события $\left\{\overline{H}_{\boldsymbol{u}_i}(\mathbf{z}) = \max_{k=1,\ldots,N}(\overline{H}_{\mathbf{z}^*}(\boldsymbol{u}_k)\right\}$ сколь угодно близка к единице.

Теорема обучения доказана.

Список литературы

1. Антюфеев В. С. Решающий алгоритм конкуренции // Пробл. информатики. 2012. № 1. С. 10–24.

2. Антюфеев В. С. Теорема обучения для алгоритма конкуренции // Сиб. журн. вычисл. математики. (В печати.)

3. Larose D. T. Discovering knowledge in data: an introduction to data mining. Hoboken: John Wiley and Sons, 2004.

4. Kohonen T. Self-organization and associative memory. Berlin: Springer Verlag, 1984. (Ser. Inform. Sci.; V. 8).

5. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. М.: Мир, 1992.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.

Антюфеев Виктор Степанович — вед. науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; тел.: (383) 330-77-21; e-mail: ant@osmf.sscc.ru

Дата поступления — 12.08.12