РЕШЕНИЕ НЕЧЕТКОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Т. Ф. Бекмуратов, Д. Т. Мухамедиева

Центр разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий, 100084, Ташкент, Узбекистан

УДК 519.71(575.1)

Рассматриваются подходы к решению нечеткой многокритериальной задачи оптимизации в условиях риска.

Ключевые слова: нечеткое множество, многокритериальная задача, оптимизация, риск, адаптивный метод, принятие решения.

An approach to solving the optimization problem and the solution of the fuzzy multiobjective optimization problem in terms of risk.

Key words: fuzzy set, multicriteria task, optimization, risk, adaptive method, decision making.

Введение. Существует большое количество работ, в которых исследуется проблема принятия решений в условиях риска [1–5]. Широко используются минимаксный подход, оптимизация ожидаемой полезности, минимизация среднего ущерба или вероятности неблагоприятного события, модели стохастического программирования и др. Изучению вопросов формализации рисков в экономическом плане (оценка риска инвестиции, принятия проектов) посвящены работы А. О. Недосекина [6]. В этих работах предлагается своего рода конструктор, который может быть использован любым экспертом по своему усмотрению. Идея применения нечетких множеств при проведении финансового анализа предприятий предложена в [6] как способ избежать неопределенности, когда она имеет не только статистический, но и лингвистический характер.

Однако данных постановок недостаточно для принятия решений в нечетких условиях, когда невозможно ориентироваться на средние показатели эффективности решений, поскольку они оправданы в случае многократно повторяющихся ситуаций, в то время как рисковые ситуации уникальны: они могут возникнуть в любой момент или не возникнуть никогда. Последние ситуации характеризуются возможностью крайне мало вероятных, но исключительно больших потерь, способных создать проблему выживания рассматриваемой системы. Ясно, что такие традиционные показатели риска, как дисперсия, в данном случае неадекватны.

Для оценки рисков в нечетких условиях предлагается дополнить систему ограничений стандартной задачи принятия решений набором ограничений по возможным потерям, а именно построить для избранных сценариев модель их последствий (ущербов) как функций управляющих параметров и накладывать экспертные ограничения на приемлемый уровень относительного ущерба для каждого сценария.

1. Подходы к решению оптимизационной задачи. Очевидно, что найти идеальный вариант критерия "максимальная доходность — минимальный риск" удается лишь в очень

Подходы к решению оптимизационной задачи

Подход	Модель
Подход "максимум выигрыша": из всех вариантов выбирается тот, который позволяет получить максимальное значение выигрыша F при приемлемом для лиц, принимающих решения (ЛПР), значении $R_{\text{пр.доп}}$	$F \to \max$, $R = R_{\text{пр.доп}}$, $\sum_j XK_j \subset K$
Подход "оптимальная вероятность": из возможных решений выбирается такое решение, при котором обеспечивается максимум математического ожидания выигрыша $M(F)$ при приемлемом для ЛПР риске R	$M(F) \to \max$, $\sum_j XK_j \subset K$
Сочетание подходов "оптимальная вероятность" и "оптимальная колеблемость": выбирается вариант, обеспечивающий минимальное значение коэффициента вариации $CV(F)$ при приемлемом для ЛПР риске R	$CV(F) \to \max$, $\sum_j XK_j \subset K$
Подход "минимум риска": из всех возможных вариантов выбирается тот, который позволяет получить ожидаемый выигрыш, т. е. предельно допустимое значение F при минимальном риске	$F = F_{\text{пр.доп}}$, $R \to \min$, $\sum_j XK_j \subset K$
Подход "максимальная доходность — минимальный риск": выбирается вариант, обеспечивающий максимум F при минимуме R в случае удовлетворения заданным ограничениям	$F \to \max$, $R \to \min$, $\sum_j XK_j \subset K$

редких случаях. Поэтому предлагаются следующие подходы к решению этой оптимизационной задачи (см. таблицу). В таблице $K = \{y | y \in R^m, y \le g\}$ — заданное выпуклое подмножество пространства R^m

$$\sum_j \mathbf{X}K_j = \left\{ y | y \in R^m, y = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}, x_i \in X, a_{ij} \in K_j \subset R^m, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, ..., m \right\}.$$

2. Решение нечеткой многокритериальной задачи оптимизации. В многокритериальных задачах сложно оценить решение задачи с учетом всех критериев. Наиболее распространенными являются метод аддитивной свертки и оценка лицом, принимающим решение (ЛПР) [7–9].

Предлагается применять нечеткие методы при оценке альтернативных решений. Решение многокритериальной задачи оптимизации включает следующие этапы [8–11]:

— формирование целевой функции в нечеткой постановке;

— определение значений критериев оценки в нечетком виде;

— разработка функций принадлежности для критериев;

— определение базы правил и (или) базы предпочтений для критериев;

— вычисление значений целевой функции;

— дефазификация (приведение к четкому виду) целевой функции.

Обозначим через $F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$ операцию свертки частных критериев оптимальности, где $\mathbf{\Lambda} \in D_{\mathbf{\Lambda}} \subset R^s$ — вектор весовых множителей ($\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_i\}, i = \overline{1, s}$); $D_{\mathbf{\Lambda}} = \{\lambda_i | \lambda_i \ge 0, \sum \lambda_i = 1, i \in [1 : s]\}$ — множество допустимых значений этого вектора.

Задача параметрического программирования с s независимыми параметрами $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_i\}$, $i = \overline{1, s}$, или S-задача параметрического программирования, в матричном виде записывается следующим образом:

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = (\bar{a}_0 + \mathbf{\Lambda}'\bar{b})\mathbf{X} + \bar{e}\mathbf{\Lambda} \to \text{extr}, \quad \sum_j \Big) X K_j \subset K, \ \lambda \in R^s.$$

Здесь $\mathbf{X} = \{x_j\}$, $j = \overline{1, n}$ — решение S-задачи параметрического программирования; $\overline{a}_0, \overline{b}, \overline{e}$ — коэффициенты, являющиеся нечеткими подмножествами числовой оси базовых множеств A_0, B_0, E_0 соответственно, представляемыми обычно в виде нечетких множеств с заданными функциями принадлежностей $\mu_{\overline{a_0}}(a_0)$ ($\overline{a_0} \subset A_0$), $\mu_{\overline{b}}(b)$ ($\overline{b} \subset \mathbf{B}$) и $\mu_{\overline{e}}(e)$ ($\overline{e} \subset E$).

Для решения задачи параметрического программирования при нечетких исходных данных (коэффициентов $\overline{a}_0, \overline{b}, \overline{e}$) предлагается использовать три подхода:

1. Получение с использованием различных операций дефазификации нечетких множеств $\overline{a}_0, \overline{b}, \overline{e}$ (интегрирования, суммирования, осреднения и др.) нечетких оценок значений коэффициентов a_0, b, e [8]. Введя эти значения в S-задачу параметрического программирования вместо нечетких коэффициентов и записав ограничения в виде соответствующих неравенств, исходную задачу сведем к виду

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = (a_0 + \mathbf{\Lambda}'\ b)\mathbf{X} + e\mathbf{\Lambda} \longrightarrow \text{extr(min)}, \quad \sum_j \Big) X K_j \leq g, \quad \lambda \in R^s. \tag{1}$$

Заметим, что в силу нечеткости описания коэффициентов $\overline{a_0}$ и $\overline{b}$ оценка любого решения $x(\lambda) \in \mathbf{X}$ (и соответственно значения функции $F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$ при $x = x(\lambda)$) представляет собой нечеткое подмножество числовой оси базового множества X.

2. Сведение решения исходной задачи к решению задач линейного программирования для каждого дискретного α-уровня [9]. В результате нечеткие ограничения записываются в интервальном виде

$$P = \Big\{ \Big) \begin{array}{l} \sigma_\alpha(a_{i1})x_1 + \sigma_\alpha(a_{i2})x_2 + \ldots + \sigma_\alpha(a_{in})x_n \subseteq \sigma_\alpha(b_i), \quad i = \overline{1, m},\ \alpha = \overline{1, p}, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n}. \end{array}$$

Здесь $\mathbf{X} = \{x_j\}$, $j = \overline{1, n}$ — решение многокритериальной задачи параметрического программирования на каждом дискретном α-уровне; $\sigma_\alpha(a_{i,j})$, $\sigma_\alpha(b_i)$ — интервальные значения коэффициентов $a_{i,j}$ и b_i на каждом дискретном α-уровне.

3. Решение задачи многокритериальной оптимизации адаптивным методом [7]. Каждая итерация этих методов включает фазу анализа, выполняемую ЛПР, и фазу расчетов, выполняемую системой многокритериальной оптимизации.

Прямой адаптивный метод решения многокритериальной задачи, который исследуется в данной работе, основан на предположении существования функции предпочтений ЛПР $F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = (a_0 + \mathbf{\Lambda}'b)\mathbf{X} + e\mathbf{\Lambda}$, которая определена на множестве $D_{\mathbf{X}}$ допустимых значений вектора варьируемых параметров $\mathbf{X}$ и выполняет отображение этого множества на множество действительных чисел $\mathbb{R}$. При этом задача многокритериальной оптимизации сводится к задаче выбора вектора $\mathbf{X}^* \in D_{\mathbf{X}}$ ($X^* = \{x_j^*\}$, $j = \overline{1, n}$), такого что

$$\min_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = F(\mathbf{X}^*, \mathbf{\Lambda}), \quad \mathbf{X} \in D_{\mathbf{X}}. \tag{2}$$

При каждом фиксированном векторе метод скалярной свертки сводит решение задачи (1) к решению однокритериальной задачи глобальной условной оптимизации (2).

Заметим, что в случае аддитивной свертки $F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$ вектор $\mathbf{X}$ принадлежит множеству эффективных по Парето векторов [9].

Указанное обстоятельство позволяет полагать, что в данном случае функция предпочтений ЛПР определена не на множестве $D_{\mathbf{X}}$, а на множестве D_A: $F : \mathbf{\Lambda} \to \mathbb{R}$. В результате многокритериальная задача сводится к задаче выбора вектора $\mathbf{\Lambda}^* \in D_{\mathbf{\Lambda}}$, такого что

$$\min_{\mathbf{\Lambda}} F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}^*), \;\; \mathbf{\Lambda} \in D_{\mathbf{\Lambda}}. \tag{3}$$

Поскольку обычно $s \ll n$, переход от задачи (1) к задаче (3) важен с точки зрения уменьшения вычислительных затрат.

Вектор $\mathbf{\Lambda}^* \in D_{\mathbf{\Lambda}}$ находится с помощью нечетких правил вывода:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{s}\lambda_i = \Psi_{i,jp}\right) \text{ — с весом } w_{jp}\right) \to F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}^*).$$

Здесь $\Psi_{i,jp}$ — лингвистический терм, которым оценивается переменная λ_i в строке с номером jp; Ψ_{jp} — весовой коэффициент правила с порядковым номером jp; $F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}^*)$ — выход нечеткого правила. Величину Ψ будем считать лингвистической переменной со значениями от “Очень-очень плохо” до “Отлично”. Ядро нечеткой переменной Ψ обозначим $\overset{*}{\Psi}$ [8], так чтобы значению переменной Ψ “Очень-очень плохо” соответствовало $\overset{*}{\Psi} = 1$, а значению “Отлично” — $\overset{*}{\Psi} = l$.

В результате многокритериальная задача сводится к задаче отыскания вектора $\mathbf{\Lambda}^* \in D_{\mathbf{\Lambda}}$, обеспечивающего максимальное значение дискретной функции $\overset{*}{\Psi}(\mathbf{\Lambda})$:

$$\max_{\mathbf{\Lambda}} \overset{*}{\Psi}(\mathbf{\Lambda}) = \overset{*}{\Psi}(\mathbf{\Lambda}^*) \; = \overset{*}{\Psi}{}^*, \quad \mathbf{\Lambda} \in D_{\mathbf{\Lambda}}.$$

Каждая входная переменная имеет собственные функции принадлежности нечетким термам Ψ_{jp}.

Функция принадлежности элемента λ_i терму Ψ_{jp} имеет вид

$$\mu^{jp}(\lambda_i) = \frac{1}{1 + [(\lambda_i - b_i^{jp})/c_i^{jp}]^2},$$

где b_i^{jp}, c_i^{jp} — параметры функции принадлежности.

Общая схема рассматриваемого метода является итерационной и включает следующие перечисленные ниже основные этапы.

Этап 1. Случайно последовательно генерируются s векторов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, и для каждого из этих векторов выполняются следующие действия:

1) решается многокритериальная задача

$$\min_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = F(\mathbf{X}^*, \mathbf{\Lambda}), \quad \mathbf{X} \in D_{\mathbf{X}}; \tag{4}$$

2) ЛПР предъявляет найденное решение $\mathbf{X}^*$, а также соответствующие значения всех частных критериев оптимальности $f_1(\mathbf{X}^*)$, $f_2(\mathbf{X}^*), \ldots, f_s(\mathbf{X}^*)$;

3) ЛПР оценивает эти данные и вводит в задачу соответствующее значение своей функции предпочтений $\overset{*}{\Psi}(\mathbf{\Lambda}_i)$.

Этап 2. На основе всех имеющихся значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ вектора $\mathbf{\Lambda}$ и соответствующих оценок функции предпочтений выполняются следующие действия:

1) строится функция $\tilde{F}_1(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$, аппроксимирующая функцию $F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$ в окрестности точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$;

2) отыскивается минимум функции $\tilde{F}_1(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$

$$\min_{A} \tilde{\Psi}_1(\mathbf{\Lambda}) = \tilde{\Psi}(\mathbf{\Lambda}_1^*), \quad \mathbf{\Lambda} \in D_{\mathbf{\Lambda}};$$

3) с найденным вектором $\mathbf{\Lambda}_1^*$ решается задача вида (4) — находятся вектор параметров и соответствующие значения частных критериев оптимальности, а затем предъявляются ЛПР, которое оценивает указанные данные и вводит в систему соответствующее значение своей функции предпочтений $F(\mathbf{\Lambda}_1^*)$.

Этап 3. На основе всех имеющихся в системе значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ вектора $\mathbf{\Lambda}$ и соответствующих оценок функции предпочтений $F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}_1^*)$ выполняется аппроксимация функции $F(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$ в окрестности точек $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2, \ldots, \mathbf{\Lambda}_k, \mathbf{\Lambda}_1^*$, строится функция $\tilde{F}_2(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$ по схеме первого этапа, до тех пор пока ЛПР не примет решение о прекращении вычислений.

Входами системы нечеткого вывода являются значения весов частных критериев оптимальности — нечеткие термы $\lambda_{i,}$, $i = 1, 2, \ldots, k \in [1 : s]$. Выходной переменной системы нечеткого вывода является лингвистическая переменная, ядро которой принимает значения $1, 2, \ldots, l$.

Совокупность значений указанных нечетких входных переменных, выходных лингвистических переменных, а также правил нечетких продукций образуют нечеткую базу знаний.

3. Настройка нечетких баз знаний с применением генетических алгоритмов оптимизации. Алгоритм настройки параметров функций принадлежности $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_q)$, $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_q)$ и $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_N)$ включает следующие этапы.

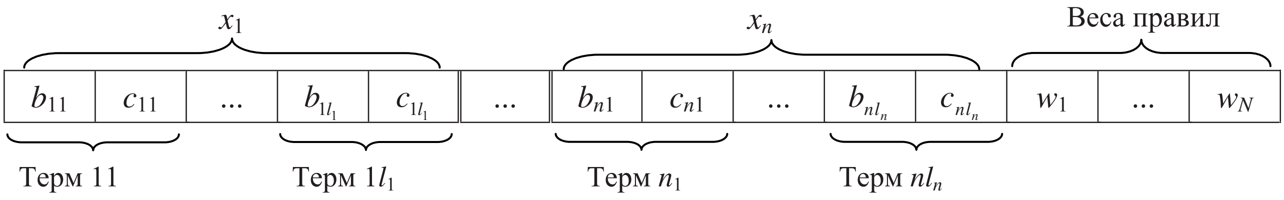
1. Формирование исходной популяции. Для реализации генетического алгоритма следует задать способ кодирования нечетких моделей. Сведем неизвестные параметры $\mathbf{W}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ в один вектор (см. рисунок):

$$S = (\mathbf{W}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (w_1, w_2, \ldots, w_N, \ b_{11,} c_{11}, \ldots, b_{1l_1}, c_{1l_1}, b_{n1,} c_{n1}, \ldots, b_{nl_1,} c_{nl_1}).$$

Здесь N — общее число строк в нечеткой базе знаний; l_i — количество термов-оценок входной переменной λ_i; $l_1 + l_2 + \ldots + l_n = q$, $i = \overline{1, n}$; q — общее число термов.

2. Скрещивание. Поскольку операция скрещивания является основной операцией генетического алгоритма, его производительность в первую очередь зависит от производительности используемой операции скрещивания. В результате скрещивания двух хромосом-родителей S_1 и S_2 получаются хромосомы-отпрыски Ch_1 и Ch_2 путем обмена генов относительно $(n+1)$-й точки скрещивания.

3. Мутация. Каждый элемент вектора S может подвергнуться операции мутации с вероятностью P_m. Обозначим мутацию элемента s через $Mu(s)$:



Код нечеткой модели — хромосома

$$Mu\,(w_j) = RANDOM\,([\underline{w},\,\overline{w}])\,,\ j = \overline{1, N},$$

$$Mu\,(b_{ip}) = RANDOM\,\left(\left[\underline{x_i},\,\overline{x_i}\right]\right),$$

$$Mu\,(c_{ip}) = RANDOM\,\left(\left[\underline{c_i},\,\overline{c_i}\right]\right),$$

где $\underline{w}$, $\overline{w}$ — нижняя и верхняя границы интервала возможных значений весов правил $[\underline{w},\,\overline{w}] \subset [0,1]$; $\left[\underline{c_i},\,(\overline{c_i})\right]$ — интервал возможных значений коэффициента концентрации-растяжения функций принадлежности термов-оценок входной переменной x_i, $\left[\underline{{}_i},(\overline{c_i})\right] \subset (0,+\infty]\,, i=\overline{1,n}$; $RANDOM\left(\left[\underline{\xi},\,\overline{\xi}\right]\right)$ обозначает операцию нахождения равномерно распределенного на интервале $\left[\underline{\xi},\,\overline{\xi}\right]$ случайного числа.

Разработано программное обеспечение в среде DELPHI-7 для решения практических задач многокритериальной оптимизации и получены результаты решения оптимизационной задачи [10, 11].

Заключение. Таким образом, показана целесообразность объединения метода нечеткого вывода и генетических алгоритмов в задачах с неопределенной или лингвистической информацией, а также в задачах, для которых характерны интуитивные решения. Использование предложенного метода позволяет существенно улучшить качество решения многокритериальных задач оптимизации с нечетко заданными параметрами и критериями. В дальнейшем планируется изучение различных гибридных методов применительно к оптимизационным задачам, а также методов автоматического формирования базы нечетких правил, что позволит значительно усовершенствовать процесс автоматизации.

Список литературы

1. Норкин В. И. Об измерении и профилировании катастрофических рисков // Кибернетика и систем. анализ. 2006. № 6. С. 80–94.

2. Ermoliev Yu. M., Ermolieva T. Yu. Catastrophic risk management: flood and seismic risks case studies / Applications of stochastic programming / Ed. by S. W. Wallace, W. T. Ziemba. Philadelphia: MPS-SIAM, 2005. P. 425–444.

3. Михалевич В. С., Кнопов П. С., Голодников А. Н. Математические модели и методы оценки риска на экологически опасных производствах // Кибернетика и систем. анализ. 1994. № 2. С. 121–138.

4. Кнопов П. С., Марьянович Т. П. О некоторых актуальных проблемах оценки риска сложных систем в условиях недостаточной информации // Кибернетика и систем. анализ. 2003. № 4. С. 125–137.

5. Сергиенко И. В., Яненко В. М., Атоев К. Л. Общая концепция управления риском экологических, техногенных и социогенных катастроф // Кибернетика и систем. анализ. 1997. № 2. С. 65–87.

6. Недосекин А. О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций. СПб.: Сезам, 2002.

7. Lee C. C. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. 1 // IEEE Trans. Systems, Man Cybernet. 1990. V. 20, N 2. P. 419–435.

8. Алтунин А. Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А. Е. Алтунин, М. В. Семухин. Тюмень: Тюмен. гос. ун-т, 2000.

9. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.

10. Бекмуратов Т. Ф. Систематизация интеллектуальных систем поддержки принятия решений // Пробл. информатики и энергетики. 2003. № 4. С. 25–35.

11. Мухамедиева Д. Т. Задачи нечеткого параметрического программирования в случае зависимости от многих параметров коэффициентов целевой функции // Вопр. вычисл. и прикл. математики (Ташкент). 2004. Вып. 114. С. 81–87.

Бекмуратов Тулкун Файзиевич — акад. АН РУз, д-р техн. наук, гл. науч. сотр. Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий; тел. (+99871) 262-71-53; e-mail: bek.tulkun@yandex.ru;

Мухамедиева Дилноз Тулкуновна — д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий; тел. (+99871) 262-71-55, e-mail: dilnoz134@rambler.ru

Дата поступления — 24.09.12