О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВОЗМОЖНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

М. З. Арсланов

Институт проблем информатики и управления Министерства образования и науки Республики Казахстан, 050010, Алма-Ата, Казахстан

УДК 681.3

В работе [1] проведено исследование обобщенной функции распределения возможностей. В настоящей работе обобщено понятие слабой непрерывности функции распределения возможностей, что позволяет охарактеризовать пространства возможностей с функцией распределения возможностей. Изучены также мощностные характеристики различных классов возможностных пространств.

Ключевые слова: теория возможностей, возможностные пространства, функция распределения возможностей.

[1] investigated generalized possibility distribution function. In this paper the notion of weakly continuous possibility distribution function is generalized. This generalization characterizes possibility spaces with possibility distribution function. The power properties of different sets of possibility spaces are investigated too.

Key words: possibility theory, possibility spaces, possibility distribution function.

1. Основные понятия теории возможностей. В настоящее время имеется несколько интерпретаций теории возможностей [2–7]. В настоящей главе мы будем рассматривать ее классический вариант [2].

Аксиоматика теории возможностей аналогична аксиоматике теории вероятностей, исключая лишь аксиому сложения, которая заменена аксиомой максимума.

Напомним основные понятия теории возможностей. Возможностное пространство есть триплет $(\Gamma, P(\Gamma), \Pi)$, где Γ — модельное пространство, $P(\Gamma)$ — множество его подмножеств, Π — возможностная мера, $\Pi : P(\Gamma) \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $Pi(\emptyset) = 0; \Pi(\Gamma) = 1$;
2. $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$.

Возможностная мера называется непрерывной сверху (сильно непрерывной), если для любой счетной совокупности вложенных друг в друга множеств

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n ...,$$

такой, что $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = A$ (другое обозначение — $A_n \searrow A$) имеет место равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \Pi(A_i) = \Pi(A)$. Возможностное пространство с непрерывной мерой возможности естественно называть непрерывным.

Возможностная мера называется непрерывной снизу (слабо непрерывной), если для любой счетной совокупности вложенных друг в друга множеств

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n...,$$

такой, что $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = A$ (другое обозначение — $A_n \nearrow A$) имеет место равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \Pi(A_i) = \Pi(A)$. Возможностное пространство со слабо непрерывной мерой возможности естественно называть слабо непрерывным.

Самый простой и естественный способ ввести на множестве Γ структуру возможностного пространства заключается в определении возможности отдельных элементов посредством некоторой функции $\pi : \Gamma \to [0, 1]$ и последующем определении возможностной меры Π по формуле:

$$\Pi(A) = \sup_{\gamma\in A} \pi(\gamma).$$

Для определенной таким образом меры возможности Π функция π называется функцией распределения возможностей. Назовем функцию распределения возможностей непрерывной, если порождаемая ею мера возможностей непрерывна. Носителем функции распределения $\pi(\cdot)$ называется множество точек, в которых она не равна нулю:

$$\operatorname{supp} \pi(\cdot) = \{\gamma \in \Gamma | \pi(\gamma) > 0\}.$$

Оказывается, что теорию возможностей можно также описать с помощью булевых алгебр без прямого использования алгебры множеств. Покажем, как это делается.

Определение. Возможностным пространством называется пара $(\mathbf{B}, \Pi)$, где $\mathbf{B}$ есть булева алгебра, $\Pi : \mathbf{B} \to [0, 1]$ — возможностная мера, удовлетворяющая аксиомам 1. $\Pi(0) = 0$, $\Pi(1) = 1$; 2. $\Pi(a \vee b) = \max(\Pi(a), \Pi(b))$.

Легко показать, что поскольку алгебра множеств является булевой алгеброй, то это определение для булевой алгебры множеств будет совпадать с традиционным. Поэтому в дальнейшем изложении мы будем в основном использовать описание теории возможностей с помощью алгебры множеств.

2. Основные результаты.

2.1. *Обобщение понятия слабой непрерывности меры возможностей.* В [1, 8–10] показано, что сильно непрерывная возможностная мера обладает функцией распределения возможностей. Однако не всякая возможностная мера с функцией распределения возможностей обладает свойством сильной непрерывности. Оказывается,что существует понятие непрерывности, которое в точности будет соответствовать возможностным пространствам с функцией распределения возможностей.

Лемма 1. *Возможностное пространство* $(X, 2^X, \Pi)$ *обладает функцией распределения возможностей тогда и только тогда, когда для любой обобщенной последовательности подмножеств модельного множества* X*, монотонной снизу* $B_\alpha \nearrow B, \alpha \in A$ *справедливо*

$$\Pi(B) = \lim \Pi(B_\alpha),$$

где $\lim$ — *обобщенный предел.*

Доказательство. Лемму достаточно доказать только в одну сторону. Пусть, напротив, существует совокупность подмножеств $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$:

$$\Pi\left(\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha\right) > \sup_{\alpha\in A} \Pi(B_\alpha). \tag{1}$$

Вполне упорядочим множество индексов A. Поэтому с самого начала можно считать, что A — вполне упорядоченное множество. Определим множества

$$C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta.$$

Ясно, что

$$C_\alpha \nearrow B = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha,$$

поэтому $\Pi(C_\alpha) \to \Pi(B)$. Обозначим

$$a = \max_{\alpha\in A} \alpha,$$

т. е., возможно, $a \notin A$. Рассмотрим оба случая.

1. Пусть $a \notin A$. Тогда рассмотрим множество индексов $\beta < a$. Так как выполняется (**??**), то возьмем

$$\gamma_0 = \min\left\{\gamma | \Pi\left(\bigcup_{\beta<\gamma} B_\beta\right) > \sup_{\beta<\gamma} \Pi(B_\beta)\right\}.$$

Тогда для любого $\gamma < \gamma_0$ имеем

$$\Pi\left(\bigcup_{\beta<\gamma} B_\beta\right) > \sup_{\beta<\gamma} \Pi(B_\beta).$$

С другой стороны,

$$\Pi(C_{\gamma_0}) = \lim_{\gamma\to\gamma_0} \Pi(C_\gamma),$$

так как

$$C_{\gamma<\gamma_0} \nearrow C_{\gamma_0};$$

если γ_0 — предельный ординал,

$$C_{\gamma_0} = \bigcup_{\beta<\gamma_0} B_\beta,$$

и поэтому

$$\Pi(C_{\gamma_0}) = \sup_{\gamma<\gamma_0} \Pi(C_\gamma).$$

То есть для любого $\varepsilon > 0$ выбираем

$$C_{\gamma_1<\gamma_0} : \ \Pi(C_{\gamma_1}) \geq \Pi(C_{\gamma_0}) - \varepsilon.$$

Но

$$\Pi(C_{\gamma_1}) = \sup_{\beta<\gamma_1} \Pi(B_\beta),$$

т. е. существует B_β:

$$\Pi(C_{\gamma_0}) \leq \Pi(B_\beta) + \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. То есть

$$\Pi(C_{\gamma_0}) = \sup_{\beta<\gamma_0} \Pi(B_\beta).$$

Противоречие.

2. Пусть $a \in A$. Тогда

$$\Pi\left(B_a \cup \bigcup_{\alpha<a} B_\alpha\right) = \max\left(\Pi(B_a), \Pi\left(\bigcup_{\alpha<a} B_\alpha\right)\right).$$

Если $\Pi(B_a) < \Pi(B)$, то

$$\Pi\left(\bigcup_{\alpha<a} B_\alpha\right) = \Pi(B),$$

т. е. в силе 1). Лемма доказана.

2.2. *Оценка мощностей возможностных пространств.* В данном разделе мы рассматриваем различные классы возможностных пространств с точки зрения их мощности.

Предварительно установим простые свойства мощности.

Лемма 2. *Мощность множества последовательностей множества* $[0,1] \times X$ *(обозначим его* S_X*) при бесконечном* X *совпадает с мощностью непрерывных сверху функций распределения возможностей на модельном множестве* X *(обозначим его* P_X*).*

Доказательство. Так как $|X \cup \{x_0\}| = |X|$, где $x_0 \notin X$ и, очевидно, $P_X \subset S_X$, то достаточно построить функцию, взаимно однозначно отображающую множество S_X во множество $P_{X\cup\{x_0\}}$. Вот подобная функция. Она отображает последовательность s в S_X

$$\langle s(x_1), s(x_2), ..., s(x_n), ...\rangle$$

в функцию распределения возможностей π из $P_{X\cup\{x_0\}}$ с носителем $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$ и значениями

$$1 = \pi(x_0), \pi(x_1) = s(x_1), \pi(x_2) = \frac{1}{2}s(x_2), ..., \pi(x_n) = \frac{1}{n}s(x_n), ...$$

Ясно, что π есть непрерывная сверху функция распределения возможностей. Также легко увидеть, что это отображение является взаимно-однозначным на свой образ, поскольку если бы $\pi_1 = \pi_2$, но $f_1 \neq f_2$, то носители были бы одинаковы, и если бы $f_1(x_i) \neq f_2(x_i)$, то

$$\pi_1(x_i) = \frac{1}{i}f_1(x_i) \neq \frac{1}{i}f_2(x_i) = \pi_2(x_i).$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Мощность множества* X^{ω_0} *совпадает с мощностью множества всех счетных подмножеств множества* X *для любого бесконечного множества* X.

Доказательство. Для этого достаточно показать, что X^{ω_0} вкладывается во множество счетных подмножеств множества $X \times N$. Для этого любой последовательности

$$(x_1, x_2, ..., x_k, ...)$$

из X сопоставим счетное подмножество в $X \times N$:

$$\{(x_1, 1), (x_2, 2), ..., (x_k, k), ...\}.$$

Остается показать, что если

$$(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \neq (y_1, y_2, ..., y_k, ...),$$

то

$$\{(x_1,1),(x_2,2),...,(x_k,k),...\} \neq \{(y_1,1),(y_2,2),...,(y_k,k),...\}.$$

Это очевидно, поскольку если бы было равенство, то выполнялось бы $(x_1,1)=(y_i,i)$ для некоторого i, т. е. $i=1, x_1=y_1$. Точно также $x_2=y_2$ и т. д. Таким образом, отображение X^{ω_0} во множество счетных подмножеств $X \times N$

$$(x_1,x_2,...,x_k,...) \to \{(x_1,1),(x_2,2),...,(x_k,k),...\}$$

инъективно, поэтому в силу свойств мощности мощность множества X^{ω_0} совпадает с мощностью множества всех счетных подмножеств множества X.

Мы можем оценить мощности некоторых классов возможностных пространств на модельном множестве X.

Ясно, что мощность множества возможностных пространств с функцией распределения возможностей есть $2^{|X|}$. Мощность всех возможностных пространств есть $2^{2^{|X|}}$ для бесконечного X, поскольку такова мощность компакта Стоуна, следовательно, получаем нижнюю оценку $2^{2^{|X|}}$, так как можно указать $2^{2^{|X|}}$ булевых мер возможностей, обобщенная функция распределения возможностей которых имеет вид

$$\pi(q)=\begin{cases} 1, & q=q_0, \\ 0, & q\neq q_0. \end{cases}$$

Ясно, что они порождают разные возможностные пространства. Кроме того, существует верхняя оценка, которая тривиальна, поскольку $\Pi : 2^X \to [0,1]$. То есть мощность всех возможностных пространств равна $c^{2^{|X|}}$, где c — мощность континуума.

Известен следующий факт. Для любого бесконечного множества X справедливо мощностное равенство

$$c^{|X|}=2^{|X|},$$

поэтому верхняя оценка для мощности всех возможностных пространств тоже $2^{2^{|X|}}$. Таким образом, булевых возможностных пространств гораздо больше, чем возможностных пространств с функцией распределения.

Очевидно, что возможностных пространств с функцией распределения больше, чем сильно непрерывных возможностных пространств. Однако оказывается, что для некоторых бесконечных множеств мощности этих классов возможностных пространств совпадают. Приведем довольно любопытный пример модельного множества, для которого мощность множества возможностных пространств с непрерывной сверху возможностной мерой совпадает с мощностью множества возможностных пространств, обладающих функцией распределения возможностей. Для этого рассмотрим следующее модельное множество:

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}^i(N),$$

где $\mathcal{P}(\cdot)$ обозначает множество всех подмножеств соответствующего множества,

$$\mathcal{P}^{i+1}(A)=\mathcal{P}(\mathcal{P}^i),$$

N есть обозначение множества натуральных чисел.

Таблица

Мощность различных классов возможностных пространств

Модельное пространство	Все возможностные пространства	Возможностные пространства с функцией распределения	Сильно непрерывные возможностные пространства	Слабо непрерывные возможностные пространства	Булевы возможностные пространства
$\lvert X\rvert < \omega$	$2^{\lvert X\rvert}$	$2^{\lvert X\rvert}$	$2^{\lvert X\rvert}$	$2^{\lvert X\rvert}$	$\lvert X\rvert$
$\lvert X\rvert = \omega$	2^{c}	$2^{\lvert X\rvert} = c$	$2^{\lvert X\rvert}$	$2^{\lvert X\rvert}$	$2^{2^{\lvert X\rvert}}$
$\omega < \lvert X\rvert < c$	$2^{2^{\lvert X\rvert}}$	$2^{\lvert X\rvert}$	c	$2^{2^{\lvert X\rvert}}$	$2^{2^{\lvert X\rvert}}$
$\lvert X\rvert > c$	$2^{2^{\lvert X\rvert}}$	$2^{\lvert X\rvert}$	$\lvert X\rvert^{\omega}$	$2^{2^{\lvert X\rvert}}$	$2^{2^{\lvert X\rvert}}$

Покажем, что

$$|X^{\omega}| = |2^{X}|. \tag{2}$$

1. Неравенство в одну сторону доказывается так:

$$|X^{\omega}| \le |X^{X}| \le |(2^{X})^{X}| = |2^{X^2}| = |2^{X}|.$$

2. Неравенство в другую сторону доказывается следующим образом:

$$|2^{X}| = \left|2^{\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}^{i}(N)}\right| = \left|\bigcap_{i=1}^{\infty} 2^{\mathcal{P}^{i}(N)}\right| =$$

$$= \left|\bigcap_{i=1}^{\infty} 2^{\mathcal{P}^{i+1}(N)}\right| \le \left|\bigcap_{i=1}^{\infty} X\right| = |X^{\omega}|\,.$$

В силу леммы 3 $|X^{\omega}|$ совпадает с мощностью множества всех счетных подмножеств этого множества. Поскольку непрерывные сверху возможностные меры обладают функцией распределения возможностей, причем со счетным носителем, то отсюда и следует равенство мощностей (**??**).

Заметим также, что аналогичное свойство выполняется для модельного множества, мощность которого χ_{ω}. Более подробно об этом можно узнать в [11].

Суммируем все полученные оценки мощности различных классов возможностных пространств в таблице.

Список литературы

1. Арсланов М. З. Об обобщении понятия функции распределения возможностей // Проблемы информатики. 2010. № 1. С. 23–30.

2. Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets And Systems. 1978. V. 1. P. 3–28.

3. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний и информатике. М.: Радио и связь, 1990.

4. Klir G. J. On fuzzy-set interpretation of possibility theory // Fuzzy Sets And Systems. 1999. V. 108. P. 263–273.

5. Аверкин А. Н. и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.

6. Пытьев Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

7. Язенин А. В. Методы оптимизации и принятия решений при нечетких данных. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Тверь, 1995.

8. Арсланов М. З., Исмаил Е. Е. Непрерывность функций распределения и мер возможностей // Докл. Акад. наук Респ. Казахстан. 2000. № 2. С. 33–42.

9. Arslanov M. Z., Ismail E. E. Measurable cardinals in possibility theory // The Bull. of Symbolic Logic. V. 8. N 1. 2002. P. 165–166.

10. Арсланов М. З., Исмаил Е. Е. О непрерывных возможностных пространствах и существовании функции распределения возможностей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 3. С. 12–18.

11. Куратовский К., Мостовский М. Теория множеств. М.: Мир, 1970.

Арсланов Марат Зуфарович — д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией Института проблем информатики и управления МОН РК; e-mail: mars@ipic.kz

Дата поступления — 06.06.2013