ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПОРИСТЫХ СРЕД В ТЕРМИНАХ СКОРОСТЕЙ, НАПРЯЖЕНИЙ И ДАВЛЕНИЯ

Х. Х. Имомназаров

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 517.95

Получена форма записи уравнения движения пористых сред в терминах скоростей, напряжений и давления в виде симметрической t-гиперболической системы.

Ключевые слова: Пористая среда, гиперболическая система.

The form of the equation of motion of porous media in terms of velocities, stresses and pressure as symmetrical t-a hyperbolic system has been obtained.

Key words: Porous media, hyperbolic system.

Введение. Теория пористоупругости широко используется в геомеханике, биофизике и других областях науки и техники. В частности, в эндогенной геологии и геофизике земной коры возникают проблемы, связанные с теоретическим анализом динамических процессов тепломассопереноса: объемного магмообразования при частичном плавлении; возникновения и эволюции флюидных систем, которые сопровождаются фильтрацией сквозь твердую вмещающую среду. Во флюидных системах развивается конвекция в условиях, когда флюид в некоторой ее части находится в критическом состоянии. При решении петрологических задач приходится анализировать многокомпонентные многофазные среды (магмы), находящиеся в термодинамическом состоянии, которое соответствует ликвидусной поверхности. Для описания динамики интрузий в этом случае при макроскопическом рассмотрении требуется вводить в теорию двухскоростные и более континуумы. Это требует построения количественной теории, отражающей характерные особенности упомянутого класса геологических задач [1].

В большинстве случаев в гидрологических задачах расчета фильтрирующихся жидкостей сквозь деформирующийся инородной каркас пользуются так называемой формулой Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\tilde{\mu}}\,\nabla\, p,$$

заменяющей в механике таких сред основное динамическое уравнение. Здесь $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, p — поровое давления, k — проницаемость, $\tilde{\mu}$ — вязкость жидкости. Это соотношение получено из лабораторных экспериментов в 1856 г. французским инженером А. Дарси, исходя из анализа расхода жидкости при заданном напоре.

В данной работе получена форма записи уравнения движения пористых сред в терминах скоростей, напряжений и давления в виде симметрической t-гиперболической системы.

1. Нелинейная система уравнений В. Н. Доровского для пористых сред. В 1989 г. В. Н. Доровский [1], основываясь на законах сохранения, инвариантности теории относительно преобразований Галилея и квазилинейности уравнения движения жидкости, согласованного с условиями термодинамического равновесия, построил нелинейную математическую модель (теория пористоупругости) движения жидкости через упругодеформируемую пористую среду:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \qquad \rho = \rho_s + \rho_l, \qquad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}, \\
\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \Pi_{ik} = \partial_k \left(\eta \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right) + \\
+ \partial_i (\zeta_{11} \operatorname{div} \mathbf{v} + \zeta_{12} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u})), \\
\Pi_{ik} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p \delta_{ik} + h_{ij} g_{jk}, \\
\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{S}{\rho} \mathbf{j} - \alpha_{33} \frac{\nabla T}{T} - \frac{\alpha_{31}}{T} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}) \right) = \frac{R}{T}, \qquad (1) \\
\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_i = - \frac{\partial_i p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\,\rho} \partial_i (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 + \frac{1}{\rho_l} \partial_k \left(\eta \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right) - \\
- \frac{h_{kj}}{2\,\rho} \partial_i g_{jk} + \frac{1}{\rho_l} \partial_i (\zeta_{11} \operatorname{div} \mathbf{v} + \zeta_{12} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u})) - \alpha_{13} \partial_i T - \alpha_{11} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u})_i, \\
\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + g_{kj} \partial_i u_j + g_{ij} \partial_k u_j + u_j \partial_j g_{ik} = 0, \qquad \rho_s = const \sqrt{\det (g_{ik})}, \\
e_0 = e_0 (\rho, S, \mathbf{j}_0, g_{ik}).
\end{gathered}
$$

Закон сохранения энергии

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \, (\mathbf{Q}^* + \mathbf{W}) = 0, \\
Q_k^* = \left(\hat{\mu} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{TS}{\rho} \right) j_k + \rho_s (\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) u_k + u_i h_{km} g_{mi}, \\
W_i = -\alpha_{31} (j_i - \rho u_i) - \alpha_{33} \partial_i T - \\
- \zeta_{21} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u})_i \operatorname{div} \mathbf{v} - \zeta_{22} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u})_i \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}) + v_k \pi_{ik}, \\
\pi_{ik} = -\eta \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) - \zeta_{11} \operatorname{div} \mathbf{v} - \zeta_{12} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}),
\end{gathered}
$$

и массы упругого пористого тела

$$
\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{u}) = 0,
$$

не входят в полную систему уравнений, поскольку являются следствием исходной системы. Последняя функциональная зависимость является уравнением состояния — она должна быть задана и замыкает систему уравнений (1) в присутствии диссипации энергии. Другими словами, структура уравнений такова, что при произвольном характере взаимодействия подсистем уравнения движения квазиленейны и выполняются общие законы сохранения при тождественном соблюдении основного термодинамического тождества:

$$de_0 = TdS + \hat{\mu} d\rho + (\mathbf{u} - \mathbf{v},\, d\mathbf{j}_0) + \frac{1}{2}\, h_{ik}\, dg_{ik}.$$

Здесь e_0 — внутренняя энергия единицы объема; первые два члена соответствуют термодинамическому соотношению для дифференциала энергии неподвижной жидкости при постоянном объеме; третье слагаемое выражает тот факт, что относительная скорость есть производная энергии по относительному импульсу [2]; четвертое слагаемое представляет собой энергию упругой деформации; $\mathbf{j}_0 = \rho_s\,(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ — плотность относительного импульса; $\mathbf{u}$ — скорость движения упругой пористой среды с парциальной плотностью ρ_s; ρ_l — парциальная плотность жидкости; η, α_{ik}, $(i,k = 1,2,3)$, $\zeta_{lm}(l,m = 1,2)$ — кинетические коэффициенты, являющиеся функциями от величин, определяющих локальное термодинамическое состояние системы; S — энтропия единицы объема; ρ — плотность; T — температура; $\hat{\mu}$ — химический потенциал; h_{ik} — компоненты тензора напряжений; g_{ik} — компоненты метрического тензора упругой деформации; δ_{ik} — символ Кронекера $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; R — диссипативная функция; e — энергия единицы объема [2]:

$$e = e_0 + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + (\mathbf{v},\, \mathbf{j} - \rho\mathbf{v}).$$

В [3, 4] показано существование четырех типов звуковых колебаний: двух поперечных (в изотропной среде их свойства совпадают) и двух продольных. В уравнении движения жидкости, опустив из рассмотрения инерционные эффекты и эффекты деформации, получим нелинейный закон Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho\rho_l\alpha_{11}(\rho, S, \mathbf{v})}\,\nabla p.$$

Принципиальное отличие линеаризованной модели Доровского от хорошо известных моделей Френкеля — Био [5, 6], состоит в том, что модель Доровского в изотропном случае описывается тремя упругими постоянными $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\alpha = \rho_0\,\alpha_3 + K/{\rho_0}^2$ [3, 4]. Эти упругие параметры взаимно-однозначно выражаются тремя скоростями $(c_t,\, c_{p_1},\, c_{p_2})$ упругих колебаний [7–9]:

$$\mu = \rho_{0,s}\, c_t^2,$$

$$K = \frac{\rho_0}{2}\frac{\rho_{0,s}}{\rho_{0,l}}\left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3}\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}c_t^2 - \sqrt{\left(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2\right)^2 - \frac{64}{9}\frac{\rho_{0,l}\rho_{0,s}}{\rho_0^2}c_t^4}\right),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\rho_0^2}\left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3}\frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}c_t^2 + \sqrt{\left(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2\right)^2 - \frac{64}{9}\frac{\rho_{0,l}\rho_{0,s}}{\rho_0^2}c_t^4}\right).$$

Данное обстоятельство является важным для численного моделирования распространения упругих волн в пористых средах, когда известны распределения скоростей акустических волн, физических плотностей матрицы и пористости.

2. Об одной форме записи системы уравнений В. Н. Доровского для пористых сред в виде симметрической t-гиперболической системы. Линеаризованная система уравнений Доровского имеет вид [3, 4]

$$\rho_{0,s}\,\frac{\partial u_i}{\partial t} + \partial_k h_{ik} + \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}\,\partial_i p = 0\,,$$

$$\rho_{0,l}\,\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}\,\partial_i p=0\,,$$
$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t}+\mu\,(\partial_i u_k+\partial_k u_i)+\left(\lambda-\frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}\,K\right)\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\mathbf{u}-\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}\,K\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\mathbf{v}=0. \tag{2}$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}-(K-\alpha\,\rho_0\,\rho_{0,s})\,\mathrm{div}\mathbf{u}+\alpha\,\rho_0\,\rho_{0,l}\,\mathrm{div}\mathbf{v}=0\,,$$

Здесь $\rho_0=\rho_{0,l}+\rho_{0,s}$, $\rho_{0,s}=\rho^f_{0,s}\,(1-d_0)$, $\rho_{0,l}=\rho^f_{0,l}\,d_0$, d_0 — пористость; $\rho^f_{0,s}$ и $\rho^f_{0,l}$ — физические плотности упругого пористого тела и жидкости, соответственно; $\rho_0^3\cdot\alpha_3>0$ — модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды.

Введем новые неизвестные функции

$$\tilde\sigma_{ij}=-h_{ij}-\frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}\,p\,\delta_{ij}\,. \tag{3}$$

Система (2), после исключения $\mathrm{div}\mathbf{u}$ в терминах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\tilde\sigma_{ik}$ и p, перепишется в виде

$$\rho_{0,s}\,\frac{\partial u_i}{\partial t}-\partial_k\tilde\sigma_{ik}=0\,, \tag{4}$$

$$\rho_{0,l}\,\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}\,\partial_i p=0\,, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2\,\mu}\,\frac{\partial\tilde\sigma_{ik}}{\partial t}-\frac{\Lambda}{2\,\mu\,\Delta}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial\tilde\sigma_{mm}}{\partial t}+\frac{\tilde\alpha}{\Delta}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{2}\,(\partial_i u_k+\partial_k u_i)=0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\tilde\alpha}{\Delta}\,\frac{\partial\tilde\sigma_{mm}}{\partial t}+\frac{3\,\rho_{0,s}}{\rho_0}\,\frac{K\,\rho_{0,l}/\rho_{0,s}+\tilde\alpha}{\Delta}\,\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}\,\mathrm{div}\mathbf{v}=0\,, \tag{7}$$

где $\Lambda=\lambda\,\alpha\,\rho_0^2-K^2$, $\tilde\alpha=\alpha\,\rho_0\,\rho_{0,s}-K$, $\Delta=3\,K\,(\alpha\,\rho_0^2-K)$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что справедливы неравенства

$$K\,\frac{\rho_{0,l}}{\rho_{0,s}}+\tilde\alpha=\alpha_3\,\rho_0^2\,\rho_{0,s}+K\,\frac{\rho_{0,l}^2}{\rho_0\,\rho_{0,s}}\;>\;0\,,\quad \Delta=3\,K\,\alpha_3\,\rho_0^3\;>\;0\,.$$

Обозначим через λ_s, μ_s коэффициенты Ламе однородного упругого изотропного материала. Используя формулу [4], получаем соотношение

$$\lim_{d_0\to 0}\rho_0^2\,\alpha_3=\frac{K_s}{\rho^f_{0,s}}.$$

Устремляя в (7) пористость к нулю, получим

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{1}{3}\,\frac{\partial\tilde\sigma_{mm}}{\partial t}\,. \tag{8}$$

Аналогично, устремляя в (6) пористость к нулю, с учетом (8), получим

$$\frac{1}{\mu_s}\,\frac{\partial\tilde\sigma_{ik}}{\partial t}-\frac{\lambda_s}{(3\,\lambda_s+2\,\mu_s)\,\mu_s}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial\tilde\sigma_{mm}}{\partial t}=\partial_i u_k+\partial_k u_i\,,$$

которые совпадают с продифференцированными по времени формулами в теории упругости [10].

Вводя вектор $\mathbf{w}=(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3,\tilde\sigma_{12},\tilde\sigma_{13},\tilde\sigma_{23},\tilde\sigma_{11},\tilde\sigma_{22},\tilde\sigma_{33},p)^{\mathrm{T}}$, перепишем систему (4)–(7) в векторной форме

$$A\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + B_k \partial_k \mathbf{w} = 0. \tag{9}$$

Здесь $A = (a_{i,j})$, $i, j = \overline{1, 13}$ — симметрическая матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{i,i} = \rho_{0,s}, a_{i+3,i+3} = \rho_{0,l}, a_{i+6,i+6} = 1/\mu, a_{i+9,i+9} = (1 - \frac{\Lambda}{\Delta})/(2\mu), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$a_{10,11} = a_{11,10} = a_{10,12} = a_{12,10} = a_{11,12} = a_{12,11} = -\Lambda/(2\mu\,\Delta),$$

$$a_{10,13} = a_{13,10} = a_{11,13} = a_{13,11} = a_{12,13} = a_{13,12} = \tilde{\alpha}/\Delta,$$

$$a_{13,13} = \frac{3\rho_{0,s}}{\rho_0}\frac{K\,\rho_{0,l}/\rho_{0,s} + \tilde{\alpha}}{\Delta},$$

остальные $a_{ij} = 0$. $B_k = (b^k_{i,j})$, $i, j = \overline{1, 13}, k = \overline{1, 3}$ — симметрические матрицы, элементы которых определяются следующим образом:

$$b^1_{1,10} = b^1_{10,1} = b^1_{2,7} = b^1_{7,2} = b^1_{3,8} = b^1_{8,3} = b^2_{1,7} = b^2_{7,1} = b^2_{2,11} = b^2_{11,2} =$$

$$= b^2_{3,9} = b^2_{9,3} = b^3_{1,8} = b^3_{8,1} = b^3_{2,9} = b^3_{9,2} = b^3_{3,12} = b^3_{12,3} = -1,$$

$$b^1_{4,13} = b^1_{13,4} = b^2_{5,13} = b^2_{13,5} = b^3_{6,13} = b^3_{13,6} = \rho_{0,l}/\rho_0,$$

остальные $b^k_{i,j} = 0$.

Если покажем, что матрица A — положительно определенная, то система (9) будет симметрической t-гиперболической (по Фридрихсу). Для этого в силу положительности парциальных плотностей упругого пористого тела $\rho_{0,s}$ и жидкости $\rho_{0,l}$, а также модуля сдвига μ достаточно показать положительно определенность следующей матрицы

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{10,10} & a_{10,11} & a_{10,12} & a_{10,13} \\ a_{10,11} & a_{11,11} & a_{11,12} & a_{11,13} \\ a_{10,12} & a_{11,12} & a_{12,12} & a_{12,13} \\ a_{10,13} & a_{11,13} & a_{12,13} & a_{13,13} \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что условия положительной определенности матрицы $\hat{A}$ выполнены:

$$a_{10,10} = \frac{1 - \frac{\Lambda}{\Delta}}{2\mu} \geq \frac{1}{3\mu} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{10,10} & a_{10,11} \\ a_{10,11} & a_{11,11} \end{vmatrix} \geq \frac{1}{12\mu^2} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{10,10} & a_{10,11} & a_{10,12} \\ a_{10,11} & a_{11,11} & a_{11,12} \\ a_{10,12} & a_{11,12} & a_{12,12} \end{vmatrix} = \frac{\alpha\rho_0^2}{4\mu^2\Delta} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{10,10} & a_{10,11} & a_{10,12} & a_{10,13} \\ a_{10,11} & a_{11,11} & a_{11,12} & a_{11,13} \\ a_{10,12} & a_{11,12} & a_{12,12} & a_{12,13} \\ a_{10,13} & a_{11,13} & a_{12,13} & a_{13,13} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\mu^2\Delta} > 0.$$

Таким образом, система (9) является симметрической t-гиперболической.

Список литературы

1. Доровский В. Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.

3. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. № 1. С. 100–111.

4. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. N. Y.: Nova Science, 1995.

5. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. Т. 8, № 4. С. 133–150.

6. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoustical Society of America. 1956. V. 28. P. 168–178.

7. Имомназаров Х. Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био // Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 4. С. 536–537.

8. Imomnazarov Kh. Kh. Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. 2000. V. 13, N 3. P. 33–35.

9. Имомназаров Х. Х., Михайлов А. А. Использование спектрального метода Лагерра для решения Линейной двумерной динамической задачи для пористых сред // Сиб. журн. индустриальной матем. 2008. Т. 11, № 3(35). С. 86–95.

10. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

Имомназаров Холматжон Худайназарович — д-р физ.-мат. наук,
ведущ. науч. сотр. Института вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН; e-mail: imom@omzg.sscc.ru

Дата поступления — 4.09.2013