СИСТЕМА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕРМИНАХ СКОРОСТЕЙ СМЕЩЕНИЙ УПРУГОГО ПОРИСТОГО ТЕЛА И ПОРОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Х. Х. Имомназаров, Ш. Х. Имомназаров*

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

* Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

УДК 517.95

Получена замкнутая система интегро-дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора смещений упругого пористого тела и порового давления в случае, когда в системе происходит потеря энергии за счет трения.

Ключевые слова: Пористая среда, гиперболическая система, коэффициент трения.

A closed system of integro-differential equations second order with respect to the velocity vector of displacements of an elastic porous body and pore pressure with allowance for energy absorption caused by the intercomponent friction coefficient.

Key words: Porous medium, hyperbolic system, the intercomponent friction coefficient.

Введение. Теория пористоупругости широко используется в геомеханике, биофизике и других областях науки и техники.

Теория Френкеля — Био является замкнутой системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторов смещений упругого пористого тела и смещений жидкости [1, 2]. Эта система описывает распространение сейсмических волн в пористой среде и в изотропном случае содержит четыре независимых упругих параметра. Линеаризованная теория В. Н. Доровского является замкнутой системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторов скорости смещений упругого пористого тела и скорости жидкости [3, 4], так же как теория Френкеля — Био, описывает распространения сейсмических волн в пористой среде, но в отличие от нее в изотропном случае описывается тремя независимыми упругими параметрами.

В работе [5] получена замкнутая система дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора смещений упругого пористого тела и порового давления во временной области. В частотной области замкнутая система дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора смещений упругого пористого тела и порового давления получена в [6].

В данной работе получена замкнутая система интегро-дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора смещений упругого пористого тела и порового давления в случае, когда в системе происходит потеря энергии за счет трения.

1. Система интегро-дифференциальних уравнений в терминах скоростей смещений упругого пористого тела и порового давления. Линеаризованная система уравнений В. Н. Доровского имеет вид [3, 4]:

$$\rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t} + \partial_k h_{ik} + \frac{\rho_s}{\rho} \partial_i p + \chi \rho_l^2 (u_i - v_i) = 0\,,$$

$$\rho_l \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\rho_l}{\rho} \partial_i p - \chi \rho_l^2 (u_i - v_i) = 0\,,$$

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \mu (\partial_i u_k + \partial_k u_i) + \left(\lambda - \frac{\rho_s}{\rho} K\right) \delta_{ik} \operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{\rho_l}{\rho} K \delta_{ik} \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - (K - \alpha \rho \rho_s) \operatorname{div}\mathbf{u} + \alpha \rho \rho_l \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\,.$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости упругого пористого тела с парциальной плотностью $\rho_s = \rho_s^f (1 - d_0)$ и жидкости с парциальной плотностью $\rho_l = \rho_l^f d_0$ соответственно; d_0 — пористость; p — поровое давление; h_{ik} — тензор напряжений; ρ_s^f и ρ_l^f — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно; $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — константы Ламе; $\alpha = \rho \alpha_3 + K/\rho^2$ [4, 5], $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, $\rho = \rho_l + \rho_s$, $\rho^3 \cdot \alpha_3 > 0$ — модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды; χ — коэффициент трения; δ_{ik} — символ Кронекера; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Упругие постоянные K, μ, α_3 выражаются через скорость распространения поперечной волны c_s и две скорости продольных волн c_{p_1}, c_{p_2} следующими формулами [7, 8]:

$$\mu = \rho_{0,s} c_s^2,$$

$$K = \frac{\rho_0}{2} \frac{\rho_{0,s}}{\rho_{0,l}} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} c_s^2 - \sqrt{\left(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2\right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_{0,l}\rho_{0,s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\rho_0^2} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} c_s^2 + \sqrt{\left(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2\right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_{0,l}\rho_{0,s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right).$$

Далее для простоты рассмотрим систему (1) с нулевыми начальными данными Коши. Из второго уравнения системы (1) получим формулу для определения скорости:

$$\mathbf{v} = \int_0^t \mathrm{e}^{-\chi \rho_l (t-\tau)} \left(\chi \rho_l \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right) d\tau.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (1), получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s} \partial_k h_{ik} + \frac{1}{\rho} \partial_i p + \frac{\chi \rho_l^2}{\rho_s} u_i = \frac{\chi \rho_l^2}{\rho_s} \int_0^t \mathrm{e}^{-\chi \rho_l (t-\tau)} \left(\chi \rho_l u_i - \frac{1}{\rho} \partial_i p \right) d\tau. \tag{2}$$

После исключения дивергенции скорости жидкости из третьего уравнения системы (1) с учетом четвертого уравнения системы (1) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \mu (\partial_i u_k + \partial_k u_i) + \left(\lambda - \frac{K^2}{\alpha \rho^2} \right) \delta_{ik} \operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{K^2}{\alpha \rho^2} \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial t} = 0\,. \tag{3}$$

Исключим скорости жидкости из четвертого уравнения системы (1), используя второе уравнение системы (1). Получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно порового давления p и скорости упругого пористого тела $\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \alpha\,\rho_l\,\Delta\,p - (K - \alpha\,\rho\,\rho_s)\,\mathrm{div}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \chi\,\rho_l\frac{\partial p}{\partial t} - \chi\,\rho_l\,(K - \alpha\,\rho^2)\,\mathrm{div}\mathbf{u} = 0. \tag{4}$$

Исключим из уравнения (2) тензор напряжений h_{ik}. Для этого дифференцируем интегро-дифференциальное уравнение по времени

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_s}\partial_k\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\,\partial_i\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\chi\,\rho_l^2}{\rho_s}\,\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\chi\,\rho_l^2}{\rho_s}\,\left(\chi\,\rho_l u_i - \frac{1}{\rho}\,\partial_i p\right) -$$

$$-\frac{\chi^2\,\rho_l^3}{\rho_s}\int_0^t \mathrm{e}^{-\chi\,\rho_l(t-\tau)}\left(\chi\,\rho_l u_i - \frac{1}{\rho}\,\partial_i p\right)d\tau.$$

Подставим в последнее интегро-дифференциальное уравнение выражение из (3). После простейших преобразований приходим к интегро-дифференциальному уравнению относительно скорости упругого пористого тела $\mathbf{u}$ и порового давления p

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho_s}\,\Delta\,\mathbf{u} - \frac{\lambda + \mu - K^2/(\alpha\,\rho^2)}{\rho_s}\,\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \frac{K - \alpha\,\rho\,\rho_s}{\alpha\,\rho^2\,\rho_s}\,\nabla\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\chi\,\rho_l^2}{\rho_s}\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} =$$

$$= \frac{\chi\,\rho_l^2}{\rho_s}\,\left(\chi\,\rho_l\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\,\nabla p\right) - \frac{\chi^2\,\rho_l^3}{\rho_s}\int_0^t \mathrm{e}^{-\chi\,\rho_l(t-\tau)}\left(\chi\,\rho_l\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\,\nabla p\right)d\tau. \tag{5}$$

Система (4) и (5) является замкнутой относительно скорости упругого пористого тела $\mathbf{u}$ и порового давления p интегро-дифференциального уравнения, которое описывает распространения сейсмических волн в насыщенной жидкостью пористой среде с учетом диссипации энергии, обусловленной коэффициентом трения.

Список литературы

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. Т. 8, № 4. С. 133–150.
2. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28, N 2. P. 168–178.
3. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. № 1. С. 100–111.
4. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. N. Y.: Nova Science, 1995.
5. Bonnet G. Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range // J. Acoust. Soc. Am. 1987. V. 82. P. 1758–1762.
6. Gorog S., Panneton R., Atalla N. Mixed displacement-pressure formulation for acoustic anisotropic open porous media // J. Appl. Phys. 1997. V. 82. P. 4192–4196.
7. Имомназаров Х. Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 4. С. 536–537.
8. Imomnazarov Kh. Kh. Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. 2000. V. 13, N 3. P. 33–35.

Имомназаров Холматжон Худайназарович — д-р физ.-мат. наук,
ведущ. науч. сотр. Института вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН; e-mail: imom@omzg.sscc.ru;
Имомназаров Шерзад Холматжонович — магистрант
Новосибирского государственного университета

Дата поступления — 12.09.2013