ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕЧЕТКОЙ ЦЕЛЬЮ

Т. Ф. Бекмуратов, Д. Т. Мухамедиева

Ташкентский университет информационных технологий,
100084, Ташкент, Узбекистан

УДК 519.8

Рассматриваются подходы к решению многокритериальной оптимизации. При формулировке задачи многокритериальной оптимизации в качестве требования к оптимальности решения вводится условие обязательного удовлетворения всех частных критериев и ограничений, а именно: в точке оптимума все функции принадлежности к множеству оптимальных решений должны быть отличными от нуля, а критерии в оптимуме должны удовлетворяться в максимально возможной степени.

Ключевые слова: Многокритериальная оптимизация, целевая функция, нечеткие множества, функция принадлежности, критерии, ограничения.

The approaches to solving multi-objective optimization. In the formulation of multi-objective optimization problem as a requirement for optimal solutions introduced mandatory condition to meet all individual criteria and constraints, namely the optimum point in all of the functions belonging to the set of optimal solutions must be different from zero and that the optimum criteria are met to the greatest extent possible.

Keywords: Multi-criteria optimization, the objective function, fuzzy sets, membership function, the criteria limits.

Введение. Классические задачи математического программирования относятся к детерминированным моделям принятия решений. В теоретическом плане они достаточно полно изучены [1–3], однако реальные прикладные задачи оказываются намного сложнее аналогичных задач в классической постановке. Эта сложность обусловливается необходимостью учета многих критериев при принятии решения, порождая класс задач многокритериальной оптимизации. Исключительное значение для решения таких задач играет принцип Парето, согласно которому оптимальное решение следует выбирать среди Парето-оптимальных точек, образующих область компромисса, причем выбор окончательного решения осуществляется с учетом дополнительной информации. Заметим, что принцип Парето не является универсальным и применяется только при выполнении ряда аксиом. И даже если эти аксиомы выполняются, построение множества Парето может вызывать значительные трудности [4 – 7]. В основе другого подхода к решению проблемы многокритериальной оптимизации лежит идея последовательных уступок, основанная на ранжировании критериев в порядке убывающей важности и решении однокритериальной задачи, в которой самый важный критерий принимает экстремальное значение, а на остальные накладываются ограничения. Недостаток данного подхода заключается в усложнении ограничивающих условий и необходимости анализа различных вариантов задачи. Переход к однокритериальной задаче возможен и при агрегировании отдельных критериев в некоторый обобщенный (интегральный) критерий с помощью подходящей свертки [8–10]. При внешней привлекательности такой подход порождает ряд вопросов: неясно, как определить вид функции агрегирования; трудно или невозможно обосновать принцип оценки ее параметров (весовых коэффициентов, показателей степеней и т. п.); проблематична интерпретация полученных результатов [11–12].

1. Постановка задачи многокритериальной оптимизации. При формулировке задачи многокритериальной оптимизации в качестве требования к оптимальности решения вводится условие обязательного удовлетворения всех частных критериев и ограничений, а именно: в точке оптимума все функции принадлежности к множеству оптимальных решений должны быть отличными от нуля, а критерии в оптимуме должны удовлетворяться в максимально возможной степени. При этом увеличение значения обобщенного критерия не должно происходить при улучшении значения одних показателей качества за счет ухудшения остальных. В терминологии теории принятия решений последнее требование эквивалентно условию принадлежности точки оптимума множеству Парето [6].

Задача многокритериальной оптимизации в матричной форме представляется в следующем виде:

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x)]^T \to \min; \quad Ax \le b \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j, \quad k \in Q = \{1, 2, ..., q\}, \quad c_{kj} \in R, \quad A = (a_{i,j}) \in R^{m \times n}.$$

Задача многокритериальной оптимизации с нечеткой целью предполагает нахождение таких $x \in R^n$, которые удовлетворяют следующим ограничениям:

$$f_k(x) \le \tilde{g}_k, \quad k = 1, 2, ..., q, \quad Ax \le b; \quad x \in R^n, \tag{2}$$

где $\tilde{g}_k$ — нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_k(f_k(x)) = \begin{cases} 1, & f_k(x) \le g_k, \\ 1 - \dfrac{f_k(x) - g_k}{t_k}, & g_k \le f_k(x) \le g_k + t_k, \\ 0, & f_k(x) \ge g_k + t_k. \end{cases} \tag{3}$$

Решение нечеткой задачи многокритериальной оптимизации (2) может быть сведено к решению четкой задачи путем преобразования ограничений к виду

$$\begin{matrix} \alpha \to \max, \\ \mu_k(f_k(x)) \ge \alpha, \end{matrix} \quad Ax \le b, \quad x \in R^n, \tag{4}$$

где α — α-уровень (срез) нечеткого множества $\tilde{g}_k$.

2. Нахождение Парето-оптимального решения задачи многокритериальной оптимизации с нечеткой целью. Решение $x^0 \in R^n$ называется Парето-оптимальным решением, если для всех $x^1 \in R^n$ выполняется условие $\mu_k(f_k(x^1)) \le \mu_k(f_k(x^0))$ и хотя бы для одного $x^1 \in R^n$ выполняется условие $\mu_S(f_S(x^1)) < \mu_S(f_S(x^0))$.

Решение $x^0 \in R^n$ называется оптимальным по критерию типа Парето, если не существует $x^1 \in R^n$, лучшего по критерию типа Парето, чем $x^0 \in R^n$.

Введем понятие улучшаемого решения $x^0 \in R^n$ по критерию типа Парето в нечеткой среде: решение $x^0 \in R^n$ назовем улучшаемым, если существует решение $x^1 \in R^n$, которое лучше $x^0 \in R^n$ по критерию типа Парето.

Решение $x^0 \in R^n$ улучшаемо в ситуации принятия многоцелевых нечетких решений $f(x) = [f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)]$ тогда и только тогда, когда существует вектор $\gamma \in R^Q$, для которого выполнены неравенства

$$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) \le c^k\,,\ \ \mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right) < c^s \tag{5}$$

для всех $k \in \{1, ..., Q\}$ и хотя бы одного $s \in \{1, ..., Q\}$, где

$$c^k = c - \gamma_k, \quad c = \max_{x^1}\min_k\left[\mu_k\left(f_k\left(x^1\right)\right) + \gamma_k\right], \quad c^k \in R, \quad c^s \in R, \quad c \in R.$$

Пусть требуемые неравенства выполнены, тогда, согласно определению $c^k \in R$, существует $x^1 \in R^n$, для которого справедливо $c \le \mu_k(f_k(x^1)) + \gamma_k$ и, следовательно, $c^k \le \mu_k(f_k(x^1))$. Тогда для всех $k \in \{1, ..., Q\}$ выполняются неравенства $\mu_S(f_S(x^0)) \le c^k \le \mu_k(f_k(x^1))$, и хотя бы для одного $s \in \{1, ..., Q\}$ выполняется неравенство $\mu_s(f_s(x^0)) < c^s \le \mu_s(f_s(x^1))$. Эти неравенства показывают, что решение $x^0 \in X$ улучшаемо.

Пусть решение $x^0 \in R^n$ улучшаемо, и пусть $x^1 \in R^n$ является тем решением, которое лучше решения $x^0 \in R^n$ по критерию Парето. Положим, $\gamma_k = \mu_s(f_s(x^1)) - \mu_k(f_k(x^1))$ для всех $k \in \{1, ..., Q\}$, где для $s \in \{1, ..., Q\}$ выполняется неравенство $\mu_s(f_s(x^1)) > \mu_s(f_s(x^0))$. Тогда

$$\max_k\left[\mu_k\left(f_k\left(x^1\right)\right) + \gamma_k\right] = \min_{x^1}\left[\mu_k\left(f_k\left(x^1\right)\right) + \gamma_k\right] = \mu_s\left(f_s\left(x^1\right)\right).$$

Учитывая, что для всех $\gamma \in R^Q$ $\min\limits_k[\mu_k(f_k(x^1)) + \gamma_k] \le c$, получаем $\mu_k(f_k(x^0)) + \gamma_k \le \mu_k(f_k(x^1)) + \gamma_k \le \max\limits_k[\mu_k(f_k(x^1)) + \gamma_k] = \min\limits_{x^1}[\mu_k(f_k(x^1)) + \gamma_k] \le c$ для всех $k \in \{1, ..., Q\}$ и $\mu_s(f_s(x^0)) + \gamma_s < \mu_s(f_s(x^1)) + \gamma_s \le c$ или хотя бы одного $s \in \{1, ..., Q\}$. Отсюда следует справедливость неравенств (5).

Решение $x^0 \in R^n$ улучшаемо в ситуации принятия многоцелевых решений тогда и только тогда, когда существует такой вектор γ из множества

$$\Gamma = \left\{\gamma \in \mathrm{R^Q} : \max_k \mu_k\left(f_k(x^1)\right) - \min_{x^1}\mu_\rho\left(f_\rho(x^1)\right) \ge \gamma_\rho - \gamma_k,\ \ (\rho, k = 1, ..., Q,\ \rho \ne k)\right\},$$

что выполнены неравенства $\mu_k(f_k(x^0)) \le c^k$ $\mu_S(f_S(x^0)) < c^S$. Справедливость этих неравенств следует из выражений

$$\left[\mu_k\left(f_k(x^0)\right) + \gamma_k\right] \le \left(\mu_k\left(f_k(x^1)\right) + \gamma_k\right) \le \max_k\left[\mu_k\left(f_k(x^1)\right) + \gamma_k\right] = \min_{x^1}\left[\mu_\rho\left(f_\rho(x^1)\right) + \gamma_\rho\right] \le c$$

для всех $k, \rho \in \{1, ..., Q\}$, $(\mu_s(f_s(x^0)) + \gamma_s) < (\mu_s(f_s(x^1)) + \gamma_s) \le c$.

Отсюда следует, что если оценочные функционалы $\{\mu_k(f_k(x^1))\}_{k=1}^Q$ получены после применения естественной нормализации, то область Γ имеет вид:

$$\Gamma = \left\{\gamma \in \mathrm{R}^{\mathrm{Q}}; |\gamma_\rho - \gamma_k| \le 1, \quad k, \rho = 1, ..., Q;\ \rho \ne k\right\}.$$

Таким образом, решение вопроса об оптимальности по Парето многоцелевого решения $x^0 \in R^n$ по критерию Парето или его улучшаемости сводится к установлению отсутствия или существования вектора $\gamma \in \Gamma$, для которого выполнены неравенства $\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) \le c^k$ $\mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right) < c^S$.

Таким образом, для того, чтобы решение $x^1 \in R^n$ было улучшаемо или оптимально по Парето, необходимо, чтобы выполнялись или были несовместны неравенства:

$$\mu_k\left(f_k\left(x^1\right)\right) \le \max_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_{x^2}\min_{\rho}\left[\mu_\rho\left(f_\rho\left(x^2\right)\right) + \gamma_\rho\right] - \gamma_k\right\}, \left(k = 1, ..., Q\right).$$

Справедливость этих неравенств следует из следующих выражений:

$$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) + \gamma_k \le \mu_k\left(f_k\left(x^1\right)\right) + \gamma_k \le \max_{x^2}\left[\mu_k\left(f_k\left(x^2\right)\right) + \gamma_k\right] = \min_{\rho}\left[\mu_\rho\left(f_\rho\left(x^2\right)\right) + \gamma_\rho\right] \le$$

$$\le \max_{x^2}\min_{\rho}\left[\mu_\rho\left(f_\rho\left(x^2\right)\right) + \gamma_\rho\right] \le \max_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_{x^2}\min_{\rho}\left[\mu_\rho\left(f_\rho\left(x^2\right)\right) + \gamma_\rho\right]\right\},$$

$$\left(\mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right) + \gamma_S\right) < \left(\mu_S\left(f_S\left(x^1\right)\right) + \gamma_S\right) \le \max_{\gamma\in\Gamma}\left\{\min_{x^2}\min_{\rho}\left(\mu_s\left(f_s\left(x^2\right)\right) + \gamma_\rho\right)\right\}$$

для всех $(\rho, k = 1, ..., Q,\ \rho \ne k)$ или хотя бы одного $s \in \{1, ..., Q\}$.

Пусть $\mu_k\left(f_k\left(x^1\right)\right)$ — функция принадлежности $f_k\left(x^1\right)$, определяемая как в (3), и $x^0 \in R^n$ — оптимальное решение улучшаемой задачи

$$\sum_{k=1}^{Q}\gamma_k \to \max, \qquad \begin{array}{c} \mu_k\left(f_k\left(x\right)\right) - \gamma_k \ge \alpha^* \ \ k = 1, ..., Q, \\ x \in X, \quad \gamma_k \ge 0. \end{array} \tag{6}$$

Тогда решение $x^0 \in R^n$ является Парето-оптимальным решением задачи (1).

Предположим обратное. Пусть $x^0 \in R^n$ не является Парето-оптимальным решением (1). Тогда существует такое решение $x^1 \in R^n$, что $f_k\left(x^1\right) \le f_k\left(x^0\right)$ при всех $(k = 1, ..., Q)$ и $f_s\left(x^1\right) < f_s\left(x^0\right)$ для некоторого $s \in \{1, .., Q\}$, т. к. γ_k, $k = 1, ..., Q$ положительный и $x^0 \in R^n$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) - \gamma_k = \alpha^*, \quad k = 1, ..., Q, \quad \sum_{k=1}^{Q}\gamma_k = \sum_{k=1}^{Q}\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) - Q\alpha^*.$$

Тем не менее, для некоторого s существует $f_k\left(x^1\right) \le f_k\left(x^0\right)$ при всех $(k = 1, ..., Q)$ и $f_s\left(x^1\right) \le f_s\left(x^0\right)$.

Это приводит к следующим неравенствам:

$$\sum_{k=1}^{Q}\gamma_k = \sum_{k=1}^{Q}\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) - Q\alpha^* = \sum_{\substack{k=1\\ k\ne S}}^{Q} \mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) + \mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right) - Q\alpha^* <$$

$$< \sum_{\substack{k=1\\ k\ne S}}^{Q} \mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \mu_S\left(f_S\left(y\right)\right) - Q\alpha^*.$$

Это означает, что решение (6) $x^0 \in X$ не является оптимальным. Это противоречие показывает, что решение $x^0 \in R^n$ является Парето-оптимальным решением задачи (1).

3. Вычислительный эксперимент. Рассмотрим пример, взятый из [12]. Рассматривается многокритериальная задача с нечеткими целями

$$\begin{cases} f_1(x) = 4x_1 - 6x_2 \to \min, \\ f_2(x) = -2x_1 - x_2 \to \min, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 8, \end{cases} \tag{7}$$

$$g_1 = 20; \quad g_2 = -9; \quad t_1 = 2; \quad t_2 = 2,$$

где $g_1,\ g_2,\ t_1,\ t_2$ — параметры функции принадлежности нечеткого множества $\tilde{g}_k$.

Сформируем функции принадлежности для нечетких целей

$$\mu_1\left(f_1(x)\right) = \begin{cases} \dfrac{22 - f_1(x)}{2}, & f_1(x) \le 22, \\ 0, & f_1(x) \ge 22, \end{cases}$$

$$\mu_1\left(f_1(x)\right) = \begin{cases} \dfrac{-7 - f_2(x)}{2}, & f_1(x) \le -7, \\ 0, & f_1(x) \ge -7, \end{cases}$$

Тогда модель (7) примет следующий вид

$$\begin{cases} \alpha \to \max, \\ \dfrac{1}{2}(22 - (4x_1 - 6x_2)) \ge \lambda, \\ \dfrac{1}{2}(-7 - (-2x_1 - x_2)) \ge \lambda, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 8. \end{cases}$$

Решением этой модели являются

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (4,5;\, 0)\,, \quad \alpha^* = 1,$$

$$f_1\left(x^*\right) = 18, f_2\left(x^*\right) = -9.$$

Рассмотрим существование вектора $\gamma = (\gamma_1,\ \gamma_2)$, возможно, улучшающего решение x^*. Для этого решим следующую задачу:

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \to \max, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2\gamma_1 \le 20, \\ -2x_1 - x_2 + 2\gamma_2 \le -9, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 8. \end{cases} \tag{8}$$

Решением задачи (8) является

$$x^{**} = (x_1^{**}, \quad x_2^{**}) = (2; 5).$$

Оптимальными значениями параметров γ_1, γ_2 и целевых функций являются

$$\gamma_1 = 21; \quad \gamma_2 = 0, \quad f_1(x^{**}) = -22; \quad f_2(x^{**}) = -9.$$

Таким образом, существует вектор $\gamma = (\gamma_1, \ \gamma_2)$, при котором Парето-оптимальное решение улучшаемо, т. е.

$$f_1\left(x^{**}\right) < f_1\left(x^{*}\right), \quad f_2\left(x^{**}\right) = f_2\left(x^{*}\right).$$

Заключение. Таким образом, нахождение Парето-оптимального решения $x^0 \in R^n$ многокритериальной задачи или его улучшаемости сводится к установлению отсутствия или существования вектора $\gamma \in \Gamma$, для которого выполнены неравенства $\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) \le c^k$, $\mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right) < c^S$.

Список литературы

1. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
2. Баева Н. Б., Бондаренко Ю. В. Основы теории и вычислительные схемы векторной оптимизации. Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
3. Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерманн К. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. М., Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьют. исслед. 2008.
4. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2005.
5. Малышев В. А., Пиявский Б. С., Пиявский С. А. Метод принятия решений в условиях многообразия способов учета неопределенностей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 1. С. 46–61.
6. Ногин В. Д. Принцип Эджворта — Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения // Журн. вычислит, математики и мат. физики. 2003. Т. 43. № 11. С. 1666–1676.
7. Zadeh L. A. Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. V. 8. N. 3. P. 338–353.
8. Tanaka Hideo, Asai Kiyaii. Fuzzy linear programming based on fuzzy functions // Bull. Univ. Osaka Prefect. 1980. V. 29. N. 2. P. 113–125.
9. Ротштейн А. П. Нечеткий многокритериальный анализ вариантов с применением парных сравнений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 3. С. 150–154.

10. Ротштейн А. П. Нечеткий многокритериальный выбор альтернатив: метод наихудшего случая // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 51–55.

11. Negoita C. The current interest in fuzzy optimization // Fuzzy Sets and Systems. 1981. V. 6. N. 3. P. 261–269.

12. Вильямс Н. Н. Параметрическое программирование в экономике. М.:, 1976.

Бекмуратов Тулкун Файзиевич — акад. АН РУз, гл. науч. сотр. Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий; e-mail: bek.tulkun@yandex.ru;
Мухамедиева Дилноз Тулкуновна — д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий; e-mail: dilnoz134@rambler.ru

Дата поступления — 25.06.13