ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С НЕТОЧНЫМИ ДАННЫМИ

Н. Р. Юничева

Институт проблем информатики и управления МОН РК,
050010, Алма-Ата, Республика Казахстан

УДК 519.712.1

Представлена процедура исследования свойства асимптотической устойчивости интеллектуальной замкнутой системы управления и построения критериальных матриц на основе матричного критерия, использующего оценку устойчивости по следу матрицы.

Ключевые слова: анализ и синтез систем автоматического управления сложными объектами, методы локализации, интервальные методы.

The research procedure of asymptotic stability property of the intellectual closed control system and construction kriterial matrixes on the basis of the matrix criterion using an estimation of stability on trace of a matrix is submitted.

Key words: analysis and synthesis of automatic control systems by complex objects, methods of localization, interval methods.

Введение. На современном этапе своего развития теория автоматического управления тяготеет к разработке концепций и принципов построения интеллектуальных систем управления сложными динамическими объектами, функционирующими в условиях неопределенности.

Разработка данных концепций и принципов осуществляется в нескольких основных направлениях: на основе технологии экспертных систем, на основе нейросетевых структур и теории нечетких множеств и систем [1–4].

Наиболее актуальными и перспективными для изучения вышеуказанного класса систем, с учетом особенностей работы алгоритмов реального времени в условиях неопределенности, являются нечеткие методы. Представление ряда ограничений на параметры как нечетких или интервальных дает возможность получать устойчивое решение в условиях погрешности информации и нечеткости производственных ограничений, т. е. в виде функций принадлежности.

Для операций над носителями нечетких множеств можно воспользоваться алгебраическими операциями интервального анализа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим замкнутую систему управления, математическая модель которой в пространстве состояний представляется следующим образом:

$$\dot{X}(t) = \mathbf{D}X(t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{D} \in M_{n,n}(I(R))$, $\mathbf{D} = \left\{[d_{ij}]\ (i,j=\overline{1,n})\right\}$, $[d_{ij}] = [\underline{d_{ij}};\overline{d_{ij}}]\ (i,j=\overline{1,n})$ — вещественная интервальная матрица замкнутой системы управления, $M_{n,n}(I(R))$ — множества матриц, элементами которых являются вещественные интервалы $[\underline{a}, \overline{a}] \overset{\Delta}{=} \{a \in R \wedge \underline{a} \le a \le \overline{a}\}$; $I(R)$ — множества всех вещественных интервалов; $\mathbf{X}(t) \in R^n$ — вектор состояний. При этом желаемый интервальный характеристический полином определяется следующим образом:

$$[d(\lambda)] = \mathbf{det}\,(\lambda E - \mathbf{D}) = \lambda^n + [d_1]\,\lambda^{n-1} + [d_2]\,\lambda^{n-2} + \cdots + [d_n]\,,$$

где E — единичная матрица; $[d_i] = \left[\underline{d_i}, \overline{d_i}\right]$ $(i = \overline{1, n})$ — интервальные коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы управления. Как отмечалось выше, система уравнений (1) является нечеткой. Поэтому для исследования динамических свойств данной системы потребуется исследование динамических свойств целого семейства точечных систем. Рассмотрим заданную матрицу $\mathbf{D}$ замкнутой системы управления (1). Пусть D — точечная матрица, такая что $D \in \mathbf{D}$. Для проведения дальнейших рассуждений воспользуемся следующими определениями.

Определение 1. Интервальная матрица $\mathbf{D}$ замкнутой системы управления вида (1) асимптотически устойчива, если асимптотически устойчивы все точечные матрицы $D \in \mathbf{D}$.

Как известно [2], характеристическое уравнение матрицы $D \in \mathbf{D}$ представляется следующим образом:

$$\det\left(D - \lambda\ E = 0\right). \tag{2}$$

Тогда для нечеткой матрицы $\mathbf{D}$ имеется следующее определение.

Определение 2. Семейство характеристических уравнений для всех точечных матриц $D \in \mathbf{D}$ называется характеристическим уравнением интервальной матрицы $\mathbf{D}$ и формально записывается в следующем виде:

$$\det\left(\mathbf{D} - \lambda\ E = 0\right).$$

Предположим, что матрица $D \in \mathbf{D}$ асимптотически устойчива, и все ее собственные значения $\lambda_i\,(D)\,(i = \overline{1, n})$ локализованы в круге единичного радиуса R в левой части плоскости комплексного переменного λ.

Для получения матричного критерия асимптотической устойчивости воспользуемся известным дробно-линейным преобразованием [5] следующего вида:

$$\rho = \frac{\lambda}{R} + 1. \tag{3}$$

Данное преобразование позволяет перевести круг заданного радиуса R в левой части плоскости комплексной переменной λ в единичный круг с центром в начале координат плоскости комплексной переменной ρ. Значение $\lambda = (\rho - 1)\,R$ из (3) подставим в (2), опуская промежуточные вычисления, получим:

$$\det\left(F - \rho I = 0\right),$$

где $F = \mathbf{D}/R + E$ — преобразованная матрица, собственные значения которой расположены в круге единичного радиуса.

Как известно [6], если $\rho_i(F)$ $(i = \overline{1, n})$ являются собственными значениями матрицы F, то собственными значениями матрицы F^k будут числа $\left(\rho_i\,(F)\right)^k$. Следовательно, если матрица $D \in \mathbf{D}$ замкнутой системы управления устойчива, то последовательное возведение матрицы F в k-ю степень позволяет уменьшить абсолютную величину собственных значений $\left(\rho_i\,(F)\right)^k$, так как все $\rho_i(F)$ $(i = \overline{1, n})$ локализованы внутри круга единичного радиуса и по модулю меньше единицы

$$|\rho_i(F)| < 1 \ (i = \overline{1,n}). \tag{4}$$

Таким образом, для асимптотической устойчивости матрицы $D \in \mathbf{D}$ необходимо и достаточно, чтобы неравенство (4) имело силу. Выполнимость необходимого и достаточного условия (4) устанавливается по $F^k \to 0$. Окончательно критерий асимптотической устойчивости можно сформулировать описанным ниже образом.

Для того, чтобы матрица $D \in \mathbf{D}$ замкнутой системы управления была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы преобразованная матрица F^k стремилась к нулевой при $k \to 0$.

Нечетким (интервальным) аналогом точечной матрицы F является матрица следующего вида:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{D}}{R} + E,$$

где $\mathbf{F} = [f_{ij}] = \left[\underline{f_{ij}}, \overline{f_{ij}}\right]$.

Аналогично рассмотренному случаю для точечной матрицы F сформулируем последовательность k степеней матрицы $\mathbf{F}$. Для асимптотической устойчивости интервальной матрицы $\mathbf{D}$ замкнутой системы управления необходимо и достаточно, чтобы нижние $\underline{f_{ij}}$ и верхние $\overline{f_{ij}}$ границы всех элементов $[f_{ij}]^{,k}$ $(i, j = \overline{1,n})$ одновременно стремились к нулю.

Возникает вопрос, можно ли установить факт устойчивости без возведения преобразованной матрицы в степень. Вследствие того, что возведение в степень матриц высоких порядков представляется трудоемкой процедурой, для установления факта асимптотической устойчивости возможно использование следа матрицы $\mathbf{F}$.

Введем в рассмотрение вещественную матрицу Q с элементами (q_{ij}), $(i, j = \overline{1,n})$:

$$q_{ij} = |\mathbf{F}| = |[f_{ij}]| = \max \left|\underline{f_{ij}}\right|, \left|\overline{f_{ij}}\right|.$$

Возможность оценки устойчивости по следу матрицы

$$trQ = \sum_{i=1}^{n} q_{ii}$$

вытекает из того факта, что след trQ^k устойчивой системы стремится к нулю при $k \to \infty$. Как известно, след матрицы Q^k представляет собой сумму всех собственных значений ρ_i^k, взятых в той же степени, что и матрица Q^k:

$$trQ^k = \rho_1^k + \rho_2^k + \cdots + \rho_n^k = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^k.$$

Вопрос о том, стремится ли степень матрицы Q^k к нулю при $k \to \infty$, может быть решен в общем случае путем изучения следов последовательных степеней, взятых в таком количестве, какой порядок матрицы. Однако при исследовании реальных технических систем матрицу Q можно не возводить в степень. При поиске области устойчивости в пространстве допустимых значений параметров управления приходится анализировать большое число неустойчивых точек. Поэтому можно воспользоваться следующим критерием:

$$|tr\ Q| \geq n. \quad (5)$$

Если при исследовании системы (1) выполняется неравенство (5), то среди $|\rho_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ найдется хотя бы одно, для которого удовлетворяется условие $|\rho_i| > 1$.

Доказательство данного утверждения получено в [7].

Таким образом, если модуль суммы диагональных элементов матрицы Q превышает порядок матрицы n, то среди $|\rho_i|$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ всегда найдется такое, для которого $|\rho_i| > 1$.

Из неравенства (5) вытекает, что достаточно построить матрицу Q, и если ее след по модулю превышает порядок матрицы n, то исследуемая точка пространства допустимых значений параметров не принадлежит области асимптотической устойчивости. Если соотношение (5) не удовлетворяется, никаких выводов относительно неустойчивости сделать нельзя. В этом случае следует рассмотреть следы последовательных степеней матрицы Q:

$$|trQ|; \quad \left|trQ^2\right|; \quad \left|trQ^4\right|; \cdots; \quad \left|trQ^k\right|.$$

Для оценки достаточно изучить следы трех последовательных степеней. Если, начиная с некоторого k, следы трех последовательных степеней матрицы Q^k убывают, то исследуемая система рассматривается как устойчивая.

Процедура вычисления радиуса, охватывающего все собственные значения матрицы замкнутой системы управления, приведена в [7].

Список литературы

1. Усков А. А., Кузьмин А. В. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика. М.: Горячая линия – Телеком. 2004.

2. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия – Телеком. 2004.

3. Ярушкина Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. Учебное пособие. Финансы и статистика, 2004.

4. Алтунин А. Е., Семухин М. В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография. Тюмень: Изд-во ТГУ, 2000.

5. Чернецкий В. И., Дидук Г. А., Потапенко А. А. Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. Л.: Энергия, 1970.

6. Карпелевич Ф. И. О характеристических корнях матрицы с неотрицательными элементами. ИАН СССР. Сер. 15. 1951.

7. Исследование динамических свойств дискретных интервальных замкнутых систем управления // Вестн. Нац. инж. акад. РК. 2006. № 2(20). С. 32–37.

Юничева Надия Рафкатовна — канд. техн. наук, доц., ведущ. науч. сотр. Института проблем информатики и управления Министерства образования и науки Республики Казахстан; e-mail: naduni@mail.ru

Дата поступления — 28.11.2013