СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА В ОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Х. Х. Имомназаров, Ш. Х. Имомназаров, С. Т. Туйчиева*

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

*Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, 100167, Ташкент, Узбекистан

УДК 550.344

Получено решение системы уравнений пороупругости в частотной области для сосредоточенного источника. Показано, что при исчезновении пористости построенное решение переходит к решению системы уравнений линейной теории упругости в частотной области.

Ключевые слова: пористая среда, гиперболическая система, фундаментальное решение, коэффициент трения.

The solution of the poroelsticity system of equations in the frequency domain for a concentrated source has been obtained. It is shown that with the vanished porosity the constructed solution goes to solving a system of linear elasticity equations in the frequency domain.

Key words: porous media, hyperbolic system, fundamental solution, friction coefficient.

Большинство встречающихся в природе и используемых в науке и технике сред не являются однофазными и не могут быть отнесены к классу жидкостей, газов или твердых упруго деформируемых тел. Отличия в свойствах отдельных фаз, составляющих среду, и межфазные взаимодействия играют определяющую роль в динамике таких сред.

Теоретическое и экспериментальное исследования волновых процессов в упруго деформируемой пористой среде, насыщенной жидкостью или газом, являются актуальными и существенны для развития представлений о процессах, сопровождающих применение современных технологий использования пористых сред. К настоящему времени для теоретического исследования распространения волн в упруго деформируемой, пористой, насыщенной жидкостью среде имеется ряд подходов, из которых следует упомянуть теорию типа Френкеля-Био [1–3]. Данная математическая модель имеет ряд недостатков [4], и, кроме того, неясна возможность ее обобщения на случай конечных деформаций упругого скелета. В [5] отмечено, что произвольные изменения четырех параметров среды приводят к нефизичным результатам. Феноменологический подход, основанный на общих первых физических принципах, был использован при построении модели течения жидкости в упругой пористой среде для случая конечных деформаций [6]. Отметим, что система определяющих дифференциальных уравнений, построенных в [6], является гиперболической, однако привести все ее уравнения к симметрическому виду не удается. В [7] уравнения течения сжимаемой жидкости в упругой пористой среде выводятся с использованием метода термодинамически согласованных систем. Полученные дифференциальные уравнения

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации „Ведущие научные школы“ НШ-5666.2014.5

образуют гиперболическую систему законов сохранения. Особенностью этих моделей является, наряду с распространением поперечной и продольной сейсмических волн, наличие второй продольной волны.

Данная работа посвящена получению решений линеаризованной системы уравнений пороупругости из [6] для простых сил. Отметим, что простейшие источники в пористых средах (модель Био) также рассматривались в [8–11] и в указанной в них литературе.

Пусть пространство R^3 заполнено упруго деформируемой изотропной пористой средой. Распространения сейсмических волн в такой среде описываются следующей системой уравнений: линеаризованной системой динамических уравнений из [6]. Векторы скорости упругого скелета $\mathbf{u}$ и жидкости $\mathbf{v}$ удовлетворяют динамическим уравнениям для упругой и жидкой фаз в отсутствии диссипации энергии

$$\partial_t^2\mathbf{u} - c_t^2\,\Delta\mathbf{u} + (c_t^2 - a_1)\,\nabla\,\nabla\cdot\mathbf{u} + a_2\,\nabla\,\nabla\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}(t,\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$\partial_t^2\mathbf{v} + a_3\,\nabla\,\nabla\cdot\mathbf{u} - a_4\,\nabla\,\nabla\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}(t,\mathbf{x}), \tag{2}$$

где $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ — массовая сила, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ∂_t — частная производная по времени t, Δ, ∇ и $\nabla\cdot$ – операторы Лапласа, градиента и дивергенции по $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ соответственно, коэффициенты a_j, $j = 1, 2, 3, 4$ выражаются с одной стороны тремя упругими параметрами λ, μ, $\alpha = \rho\,\alpha_3 + \frac{K}{\rho^2}$ и соответствующими парциальными плотностями упругой матрицы ρ_s, жидкости ρ_l формулами [6, 12]:

$$a_1 = \frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho_s} - \frac{2\,K}{\rho} + \alpha\,\rho_s, \qquad a_4 = \alpha\,\rho_l, \qquad K = \lambda + \frac{2}{3}\,\mu,$$

$$a_2 = \frac{\rho_l}{\rho}\left(\frac{K}{\rho_s} - \alpha\,\rho\right), \qquad a_3 = \frac{K}{\rho} - \alpha\,\rho_s, \qquad \rho = \rho_l + \rho_s;$$

с другой стороны, тремя скоростями c_t, c_{l_1}, c_{l_2} и соответствующими парциальными плотностями упругой матрицы ρ_s, жидкости ρ_l следующими формулами [13, 14]:

$$a_1 = \frac{\rho_l}{\rho}\,\left(c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2\right) + \frac{4}{3}\,\frac{\rho_s}{\rho}\,c_t^2 + \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho}\,\tilde{z},$$

$$a_2 = \frac{\rho_l}{\rho}\,\left(c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - 2\tilde{z} - \frac{4}{3}\,c_t^2\right), \quad a_3 = \frac{\rho_s}{\rho}\,\left(c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - 2\tilde{z} - \frac{4}{3}\,c_t^2\right),$$

$$a_4 = \frac{\rho_s}{\rho}\,\left(c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - \frac{4}{3}\,c_t^2\right) - \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho}\,\tilde{z},$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{2}\,\left(c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - \frac{8}{3}\,\frac{\rho_s}{\rho}\,c_t^2\right) + \sqrt{\frac{1}{4}(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)^2 - \frac{64}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho^2}\,c_t^4}.$$

Парциальные плотности ρ_l и ρ_s связаны с соответствующими физическими плотностями жидкости ρ_l^f и упругого скелета ρ_s^f следующими формулами $\rho_l = \rho_l^f\,d_0$ и $\rho_s = \rho_s^f\,(1 - d_0)$, где d_0 — пористость.

Заметим, что при исчезновении пористости уравнение (1) переходит к неоднородной системе Ламе для однородной упругой среды [15, 16].

В случае, когда массовая сила $\mathbf{F}$, отнесенная к единице массы, имеет магнитуду F_0 и сосредоточена в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, она имеет вид

$$\rho \mathbf{F} = \mathbf{e}\, f(t)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{3}$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор из R^3, $\delta(\mathbf{x})$ — функция Дирака, $f(t)$ — форма зондирующего сигнала по времени. Источники такого вида принято называть простой силой или сосредоточенной силой. Подставляя (3) в (1), (2) и переходя в полученных уравнениях к образам Фурье по времени, получим

$$\omega^2\, \hat{\mathbf{u}} - c_t^2\, \nabla\mathrm{x}\nabla\mathrm{x}\hat{\mathbf{u}} + a_1\, \nabla\, \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} - a_2\, \nabla\, \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{e}\, \frac{F_0}{\rho} \hat{f}(\omega)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{4}$$

$$\omega^2\, \hat{\mathbf{v}} - a_3\, \nabla\, \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} + a_4\, \nabla\, \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{e}\, \frac{F_0}{\rho} \hat{f}(\omega)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{5}$$

где $\nabla\mathrm{x}$ — оператор ротора по $\mathbf{x}$, значок „крышка“ означает преобразование Фурье по времени, ω — круговая частота.

Используя хорошо известную формулу векторного анализа

$$\mathbf{e}\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\frac{\mathbf{e}}{4\pi}\, \Delta \frac{1}{R} = -\frac{1}{4\pi} \left[\nabla\, \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}}{R} \right) - \nabla\mathrm{x}\nabla\mathrm{x} \left(\frac{\mathbf{e}}{R} \right) \right]$$

и полагая

$$\hat{\mathbf{u}} = F_0\, \hat{f}(\omega) \Big[\nabla\, \nabla \cdot (\hat{u}_l\, \mathbf{e}) - \nabla\mathrm{x}\nabla\mathrm{x}(\hat{u}_t\, \mathbf{e}) \Big], \tag{6}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = F_0\, \hat{f}(\omega)\, \nabla\, \nabla \cdot (\hat{v}_l\, \mathbf{e}), \tag{7}$$

из (4) и (5) получим

$$c_t^2\, \Delta \hat{u}_t + \omega^2 \hat{u}_t = \frac{1}{4\pi\rho\, R}, \tag{8}$$

$$\omega^2\, \hat{u}_l + a_1\, \Delta \hat{u}_l - a_2\, \Delta \hat{v}_l = \frac{1}{4\pi\rho\, R}, \tag{9}$$

$$\omega^2\, \hat{v}_l - a_3\, \Delta \hat{u}_l + a_4\, \Delta \hat{v}_l = \frac{1}{4\pi\rho\, R}, \tag{10}$$

где $R = |\mathbf{R}|$, $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $c_t = \sqrt{\mu/\rho_s}$.

Удобно ввести новые функции $\tilde{u}_l, \tilde{v}_l$ по формуле

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_l \\ \tilde{v}_l \end{pmatrix} = \frac{1}{m_2 - m_1} \begin{pmatrix} m_2 & -1 \\ -m_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_l \\ \hat{v}_l \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $m_1 = \frac{a_3}{a_4 - c_{l_1}^2}$, $m_2 = \frac{a_3}{a_4 - c_{l_2}^2}$.

Подставляя (11) в (9) и (10), получим следующее уравнение

$$c_{l_1}^2\, \Delta \tilde{u}_l + \omega^2 \tilde{u}_l = \frac{1 - 1/m_2}{4\pi\rho\, (1 - m_1/m_2) R}, \tag{12}$$

$$c_{l_2}^2\, \Delta \tilde{v}_l + \omega^2 \tilde{v}_l = \frac{1 - m_1}{4\pi\rho\, (m_2 - m_1) R}. \tag{13}$$

Отметим, что при исчезновении пористости из (12), с учетом определения коэффициентов a_3, a_4, m_1, m_2 и определения скоростей продольных волн c_{l_1}, c_{l_2}, получим уравнение для скалярного потенциала в упругой среде [15, 16].

Решениями уравнений (8)–(10), удовлетворяющих условиям $\hat{u}_t(\omega, 0) = 0$, $\tilde{u}_l(\omega, 0) = 0$, $\tilde{v}_l(\omega, 0) = 0$, являются функции

$$\hat{u}_t(\omega, R) = \frac{1}{4\pi\omega^2\rho}\frac{1-\mathrm{e}^{-i\,k_t\,R}}{R},$$

$$\tilde{u}_l(\omega, R) = \frac{1}{4\pi\omega^2\rho}\frac{1-1/m_2}{1-m_1/m_2}\frac{1-\mathrm{e}^{-i\,k_{l_1}\,R}}{R},$$

$$\tilde{v}_l(\omega, R) = \frac{1}{4\pi\omega^2\rho}\frac{1-m_1}{m_2-m_1}\frac{1-\mathrm{e}^{-i\,k_{l_2}\,R}}{R},$$

где $k_n = \frac{\omega}{c_n}$, $n = t,\, l_1,\, l_2$.

Подставляя эти выражения в (6) и (7), получим

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{F_0\,\hat{f}(\omega)}{4\pi\rho\,c_t^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_t\,R}}{R}\,\mathbf{e} + \nabla\,\nabla\cdot\left[\mathbf{e}\left(\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_t\,R}}{k_t^2\,R} - \nu_1\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_1}\,R}}{k_t^2\,R} - \nu_2\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_2}\,R}}{k_t^2\,R}\right)\right]\right), \tag{14}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{F_0\,\hat{f}(\omega)}{4\pi\omega^2\rho}\,\nabla\,\nabla\cdot\left[\mathbf{e}\left(\frac{1}{R} - m_1\,\nu_1\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_1}\,R}}{k_t^2\,R} - m_2\,\nu_2\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_2}\,R}}{k_t^2\,R}\right)\right], \tag{15}$$

где

$$\nu_1 = \frac{1-1/m_2}{1-m_1/m_2}, \quad \nu_2 = \frac{1/m_2 - m_1/m_2}{1-m_1/m_2}.$$

Формулы (14) и (15), используя единичную матрицу $\mathrm{E} = (\delta_{ij})_{3\times 3}$, можно представить в эквивалентном виде

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{F_0\,\hat{f}(\omega)}{4\pi\omega^2\rho}\left(\nabla\mathrm{x}\nabla\mathrm{x}\left(\mathrm{E}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_t\,R}}{R}\right) - \nabla\,\nabla\cdot\left[\mathrm{E}\left(\nu_1\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_1}\,R}}{R} + \nu_2\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_2}\,R}}{R}\right)\right]\right)\mathbf{e},$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{F_0\,\hat{f}(\omega)}{4\pi\omega^2\rho}\,\nabla\,\nabla\cdot\left[\mathrm{E}\left(\frac{1}{R} - m_1\,\nu_1\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_1}\,R}}{k_t^2\,R} - m_2\,\nu_2\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_2}\,R}}{k_t^2\,R}\right)\right]\mathbf{e}.$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

В этих формулах легко узнать, что выражения

$$\mathbf{G}^u(\omega;\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi\omega^2\rho}\left(\nabla\mathrm{x}\nabla\mathrm{x}\left(\mathrm{E}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_t\,R}}{R}\right) - \nabla\,\nabla\cdot\left[\mathrm{E}\left(\nu_1\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_1}\,R}}{R} + \nu_2\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_2}\,R}}{R}\right)\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu(1+\rho_l/\rho_s)}\left(\mathrm{E}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_t\,R}}{R} + \nabla\,\nabla\left[\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_t\,R}}{k_t^2\,R} - \nu_1\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_1}\,R}}{k_t^2\,R} - \nu_2\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_2}\,R}}{k_t^2\,R}\right]\right),$$

$$\mathbf{G}^v(\omega;\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi\omega^2\rho}\,\nabla\,\nabla\cdot\left[\mathrm{E}\left(\frac{1}{R} - m_1\,\nu_1\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_1}\,R}}{k_t^2\,R} - m_2\,\nu_2\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_2}\,R}}{k_t^2\,R}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\omega^2\rho}\,\nabla\,\nabla\,\left(\frac{1}{R} - m_1\,\nu_1\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_1}\,R}}{k_t^2\,R} - m_2\,\nu_2\,\frac{\mathrm{e}^{-i\,k_{l_2}\,R}}{k_t^2\,R}\right)$$

являются фундаментальной матрицей с компонентами $G^u_{ij}(\omega;\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$, $G^v_{i'j'}(\omega;\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ ($i' = i+3,\, j' = j+3,\, i,\, j = 1,\, 2,\, 3$) системы уравнений пороупругости (9)–(11), удовлетворяющей следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\omega^2\,\mathbf{G}^u - c_t^2\,\nabla\mathrm{x}\nabla\mathrm{x}\mathbf{G}^u + a_1\,\nabla\,\nabla\cdot\mathbf{G}^u - a_2\,\nabla\,\nabla\cdot\mathbf{G}^v = -\rho^{-1}\,\mathrm{E}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),$$

$$\omega^2\,\mathbf{G}^v - a_3\,\nabla\,\nabla\cdot\mathbf{G}^u + a_4\,\nabla\,\nabla\cdot\mathbf{G}^v = -\rho^{-1}\,\mathrm{E}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0).$$

Тогда решения $\hat{\mathbf{u}}$ и $\hat{\mathbf{v}}$ через фундаментальные матрицы $\mathbf{G}^u$ и $\mathbf{G}^v$ выражаются согласно формулам

$$\hat{\mathbf{u}} = F_0\,\hat{f}(\omega)\,\mathbf{G}^u\,\mathbf{e}, \qquad \hat{\mathbf{v}} = F_0\,\hat{f}(\omega)\,\mathbf{G}^v\,\mathbf{e}.$$

Таким образом, получены решения системы уравнений пороупругости в частотной области для сосредоточенного источника. Показано, что при исчезновении пористости построенное решение переходит к решению системы уравнений линейной теории упругости в частотной области. Из построенных решений можно получить различные решения для разных сил в пористых, насыщенных жидкостью средах. Также из этих решений можно получить решения системы уравнений пороупругости во временной области.

Список литературы

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. „Геогр. и геофиз.“ 1944. Т. 8. № 4. С. 133–150.

2. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28. N 2. P. 168–178.

3. Carcione J. M. Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic Porous and Electromagnetic Media. N. Y.: Elsevier, 2007.

4. Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012.

5. Stoll R. D. Comments on „Biot model of sound propagation in water-saturated sand“ // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103. P. 2723–2725.

6. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modeling in the theory of multivelocity continuum. N. Y.: Nova Sci., 1995.

7. Роменский Е. И. Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в пористой упругой среде // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14. № 4(48). С. 86–97.

8. Bonnet G. Basic Singular Solutions for a Poroelastic Medium in the Dynamic Range // J. of the Acoustical Society of America. 1987. V. 82. P. 1758–1762.

9. Burridge R., Vargas C. A. The fundamental solution in dynamic poroelasticity // Geophys. J.R. Astron. Soc. 1979. V. 58. P. 61–90.

10. Kaynia A. M. Banerjee P. K. Fundamental solution of Biot's equations of dynamic poroelasticity // Int. J. of Eng. Sci. 1992. V. 77. P. 12–23.

11. Молотков Л. А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб: Наука, 2001.

12. Dorovsky V. N., Imomnazarov Kh. Kh. A Mathematical Model for the Movement of a Conducting Liquid Through a Conducting Porous Medium // Mathl. Comput. Modelling. 1994. V. 20. N 7. P. 91–97.

13. Имомназаров Х. Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био // Доклады РАН. 2000. Т. 373. № 4. С. 536–537.

14. Imomnazarov Kh. Kh. Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. 2000. V. 13. N 3. P. 33–35.

15. Купрадзе В. Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М. Наука, 1976.

16. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Том 1. М.: Мир, 1983.

Имомназаров Холматжон Худайназарович —
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

Имомназаров Шерзад Холматжонович — аспирант Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

Туйчиева Сайера Тохировна — старший преподаватель
Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта

Дата поступления — 10.04.2015