

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ В ВИДЕ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

А. К. Кудайкулов, Б. З. Кенжегулов*, У. Б. Утебаев*, Б. М. Токкулиев*

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, 010000, Астана, Казахстан

*Атырауский государственный университет им. Х. Досмухаметова,
060011, Атырау, Казахстан

УДК 539.3

В статье представлены результаты использования примерно-аналитического и численного способов решения задачи термо-напряжения ядра переменного сечения, застрявшего двумя концами в присутствии теплового потока и теплообмена. На основе приведенного примера приведен сравнительный анализ и определены ошибки использования указанных методов.

Ключевые слова: температура, напряженное состояние, конус, термоупругость, стержень.

In the paper ways of use of the approximately-analytical and numerical decision of a problem of a thermo-tension of the core of variable section jammed by two ends in the presence of a thermal stream and heat exchange are resulted. On the basis of the resulted example the comparative analysis is carried out and errors of use of the specified methods are defined.

Key words: temperature, stressed state the cone, thermoelasticity, the rod.

Существующие методы исследования установившегося термомеханического состояния стержней ограниченной длины не позволяют учесть зависимость между коэффициентом теплового расширения и полем распределения температуры, условия эксплуатации и закрепления. К текущему моменту не разработана математическая модель установившегося термомеханического состояния стержней при вышеотмеченных условиях работы конструктивного элемента. Определяющие соотношения термоупругости слабо сжимаемых материалов рассмотрены в [1]. Для записи кинематических соотношений использовано разложение градиента места на силовую и температурную составляющие. Сжимаемость (или не сжимаемость) материала определяется обобщенным модулем упругости, по величине которого можно судить о степени сжимаемости материала. В [2] рассматривается проблема прочностного расчета самокомпенсирующихся трубопроводов, уложенных в грунт, при нагреве. Полагается, что компенсация температурных удлинений происходит за счет изгибных деформаций трубопровода в упругой среде с соответствующим коэффициентом жесткости. Обзор результатов (полученных в последнее время) о точной и приближенной управляемости и стабилизации в системах с распределенными параметрами, описывающими процессы управляемости и стабилизации в теориях упругости, теплопроводности и термоупругости, рассмотрен в [3].

В [4] описываются выдвигаемые тонкостенные стержни, используемые на космических аппаратах в качестве удлинителей для различных грузов и приборов, а также штанг гравитационной стабилизации. Рассмотрена связанная нелинейная задача сильного термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного круглого стержня с учетом внешнего

и внутреннего теплоизлучения и получено ее численное решение. Задача об определении температурных напряжений в трехслойной системе рассмотрена в [5]. Алгоритм расчета температурных напряжений и деформаций в круглых упругих элементах в виде трехслойных пластин, состоящих из жестких слоев, выполненных из разнородных материалов и соединенных между собой промежуточным слоем, работающим на сдвиг, исследован в [6].

Предположим, дан вертикальный стержень переменного сечения и ограниченной длины L (см). Верхний конец его жестко заземлен. Ось O_x совпадает с осью исследуемого стержня, направим ее сверху вниз. Боковая поверхность стержня теплоизолирована. Радиус стержня r (см) по направлению оси меняется линейно, т.е. $r = ax + b$, где a и b — постоянные числа. Если радиус стержня на верхнем конце (при $x = 0$) обозначить через r_0 , а на нижнем конце ($x = L$) через r_L , то имеем, что

$$r = \left(\frac{r_L - r_0}{L} \right) \cdot x + r_0, 0 \leq x \leq L.$$

Тогда значение площади поперечного сечения стержня зависит от координаты x нелинейно

$$\begin{aligned} F &= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left[\left(\frac{r_L - r_0}{L} \right) \cdot x + r_0 \right]^2 = \\ &= \pi \cdot \left[\left(\frac{r_L - r_0}{L} \right)^2 \cdot x^2 + 2r_0 \left(\frac{r_L - r_0}{L} \right) \cdot x + r_0^2 \right], 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть на площадь поперечного сечения верхнего заземленного конца ($x = 0$) стержня $S_0 = \pi \cdot r_0^2$ подведен тепловой поток q (Вт/см²). Через площадь поперечного сечения нижнего ($x = L$) конца стержня $S_L = \pi \cdot r_L^2$ происходит теплообмен с окружающей ее средой. При этом коэффициент теплообмена — h (Вт/(см² · °C)), а температура окружающей среды — T_{co} (°C) (рис. 1).

Требуется определить поле распределения температуры по длине стержня переменного сечения, а также величину удлинения за счет температурного распределения.

Эту задачу решим, пользуясь законами сохранения энергии. При этом сначала ее решим приближенно-аналитическим методом. Для этого поле распределения температуры по длине рассматриваемого стержня переменного сечения аппроксимируем полным полиномом второго порядка

$$T = T(x) = ax^2 + bx + c = \varphi_i(x)T_i + \varphi_j(x)T_j + \varphi_k(x)T_k, 0 \leq x \leq L, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{L^2 - 3Lx + 2x^2}{L^2}; \quad \varphi_j(x) = \frac{4Lx - 4x^2}{L^2}; \quad \varphi_k(x) = \frac{2x^2 - Lx}{L^2}; \\ T_i &= T(x = 0); \quad T_j = T(x = L/2); \quad T_k = T(x = L). \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь напомним выражение функционала, которое характеризует полную тепловую энергию исследуемого переменного сечения стержня ограниченной длины [7, 8]

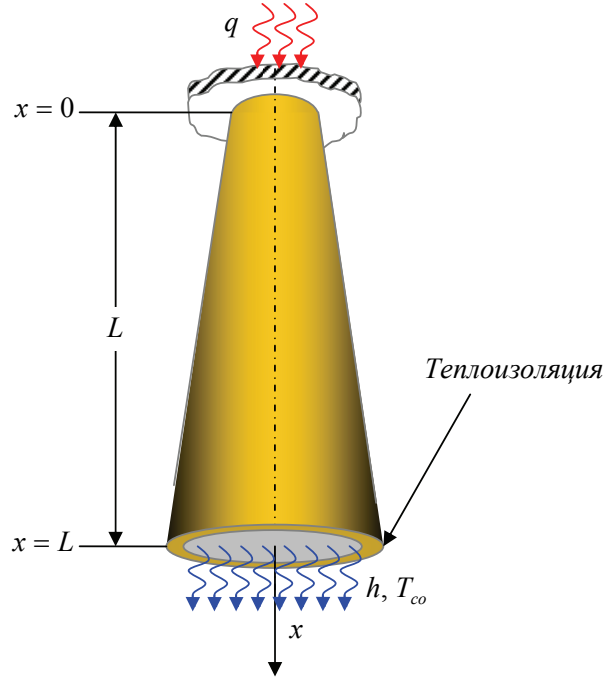


Рис. 1. Расчетная схема исследуемой задачи

$$I = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_0} q T dS + \int_{S_L} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 dS, \quad (4)$$

где V — объем стержня переменного сечения; S_0 — площадь поперечного сечения верхнего заземленного конца ($x = 0$) стержня, куда подведен тепловой поток q ; S_L — площадь поперечного сечения нижнего конца ($x = L$) стержня, через которую происходит теплообмен.

Как известно, объем усеченного конуса определится следующим образом

$$V = \frac{1}{3} (r_0^2 + r_0 r_L + r_L^2) \cdot \pi L. \quad (5)$$

Градиент температуры определяется из (2)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} = \frac{4x - 3L}{L^2} T_i + \frac{4L - 8x}{L^2} T_j + \frac{4x - L}{L^2} T_k. \quad (6)$$

Пользуясь соотношениями (4) и (6), из (4) получим интегрированный вид функционала (4):

$$\begin{aligned} I = & \frac{K_{xx}}{2} \int_0^L \left(\frac{4x - 3L}{L^2} T_i + \frac{4L - 8x}{L^2} T_j + \frac{4x - L}{L^2} T_k \right)^2 dx + \int_{S_0} q T dS + \\ & + \int_{S_L} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 dS = \frac{SK_{xx}}{6L} (7T_i^2 - 16T_i T_j + 2T_i T_k - 16T_j T_k + 16T_j^2 + 7T_k^2) + \\ & + q S_0 T_i + \frac{h S_L}{2} (T_k - T_{co})^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $S = \frac{\pi}{3} (r_0^2 + r_0 r_L + r_L^2)$; $S_0 = \pi \cdot r_0^2$; $S_L = \pi \cdot r_L^2$.

Далее, минимизируя функционал I по узловым значениям температуры, получим следующую систему разрешающих уравнений:

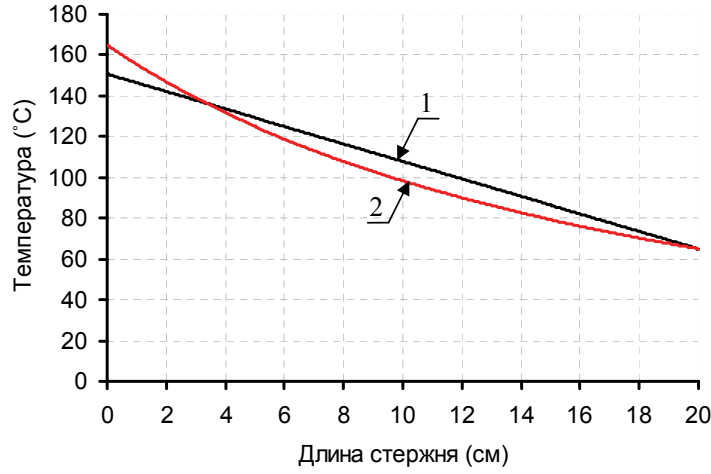


Рис. 2. Поле распределения температуры по длине стержня переменного сечения: 1 — приближенно-аналитическое решение; 2 — численное решение с погрешностью

$$\left. \begin{aligned} 1) \frac{\partial I}{\partial T_j} = 0; &\Rightarrow \frac{S \cdot K_{xx}}{6L}(14T_i - 16T_j + 2T_k) + q \cdot S_0 = 0; \\ 2) \frac{\partial I}{\partial T_j} = 0; &\Rightarrow \frac{S \cdot K_{xx}}{6L}(-16T_i - 16T_k + 32T_j) = 0; \\ 3) \frac{\partial I}{\partial T_k} = 0; &\Rightarrow \frac{S \cdot K_{xx}}{6L}(2T_i - 16T_j + 14T_k) + \frac{h \cdot S_L}{2}(2T_k - 2T_{co}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь следует отметить, что во всех скобках сумма коэффициентов перед узловыми значениями всегда будет равно нулю.

$$\left. \begin{aligned} (14 - 16 + 2) &= 0; \\ (-16 - 16 + 32) &= 0; \\ (2 - 16 + 14) + (2 - 2) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая систему (8), определим узловые значения температуры

$$\left. \begin{aligned} T_i &= T_{co} - \frac{qS_0}{hS_L} - \frac{qLS_0}{SK_{xx}}; \\ T_j &= T_{co} - \frac{qS_0}{hS_L} - \frac{qLS_0}{2SK_{xx}}; \\ T_k &= T_{oc} - \frac{qS_0}{hS_L}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (2), определим закон распределения температуры по длине исследуемого стержня переменного сечения:

$$T = T(x) = \left(T_{co} - \frac{q\ell S_0}{SK_{xx}} - \frac{qS_0}{hS_L} \right) + \frac{qS_0}{SK_{xx}} \cdot x, 0 \leq x \leq L.$$

Отсюда видно, что в этом случае закон распределения температуры по длине стержня переменного сечения имеет линейный характер. Тогда градиент температуры будет постоянной величиной, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{qS_0}{SK_{xx}}, 0 \leq x \leq L.$$

Примем следующие исходные данные: $L = 20$ см; $r_0 = 1$ см; $r_L = 2$ см; $K_{xx} = 100$ В/(см·°С); $q = -1000$ В/см²; $h = 10$ В/(см²·°С); $T_{co} = 40$ °С; $E = 2 \cdot 10^6$ кГ/см². Коэффициент теплового расширения материала стержня $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ 1/°С.

При этих исходных данных имеем

$$T_i = 150,714 \text{ °С}; T_j = 107,857 \text{ °С}; T_k = 65 \text{ °С}.$$

Тогда закон распределения температуры по длине исследуемого стержня переменного сечения имеет следующий вид

$$T(x) = 150,714 - \frac{30}{7} \cdot x, 0 \leq x \leq L = 20 \text{ см}.$$

Тогда площадь ограниченной координатными осями O_T и O_x , а также прямой $T(x) = 150,714 - \frac{30}{7} \cdot x$ будет равна

$$S_{T_1} = \int_0^L T(x) dx = 2157,14 \text{ °С} \times \text{см}.$$

Величина удлинения исследуемого стержня будет

$$\Delta \ell_{T_1} = \int_0^L \alpha \cdot T(x) dx = 2157,14 \cdot 125 \cdot 10^{-7} = 0,02696 \text{ см}.$$

Здесь следует отметить, что полученное аналитическое решение $T = T(x)$ является относительно приближенным. В целях исследования погрешности полученного аналитического решения теперь данную задачу решим численно. Для этого исследуемый стержень дискретизируем 2, 4, 8, 10, 100, 200, 300 квадратичными элементами, каждый раз полученные численные решения сравниваем с приближенно-аналитическим решением. Эти сравнения приводятся в сравнительной таблице. В этой таблице видно, что полученное приближенно-аналитическое решение будет завышено всего на 3,919 % от численного решения с погрешностью 0 %.

На рис.2 приводится разница между приближенно-аналитическим решением и численно-точным.

Таким образом, выяснили, что во многих инженерных расчетах можно пользоваться удобным приближенно-аналитическим решением.

Теперь в этом примере предположим, что оба конца рассматриваемого стержня переменного сечения жестко заземлены. В связи с этим в нем возникают сжимающее усилие и напряжение (рис. 3).

Для того чтобы найти величину сжимающего усилия R , сначала вычислим осредненную величину площади поперечного сечения. Площадь поперечного сечения левого конца стержня будет $F_0 = \pi \cdot r_0^2 = \pi$, а правого конца $F_L = \pi \cdot r_L^2 = 4\pi$. Тогда вычисляем арифметическое среднее значение площади поперечного сечения. Каждое значение площади поперечного сечения определяется по формуле (1).

Тогда предполагая, что один конец стержня свободен и на нем приложено сжимающее усилие R , по закону Гука определим величину укорачивания исследуемого стержня из-за сжимающего усилия R :

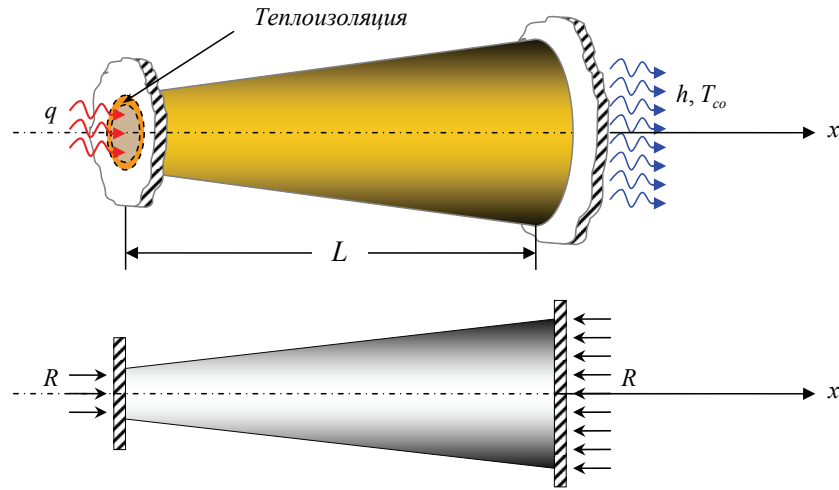


Рис. 3. Расчетная схема заземленного двумя концами стержня переменного сечения

Таблица

Сравнительная таблица

№ варианта	Число дискретных элементов	Площадь $S_T(^{\circ}\text{C} \times \text{см})$	Величина удлинения стержня $\Delta\lambda_T$ (см)	Разница в %
1	1	2157,1428	0,026964	100,00
2	2	2102,2759	0,026278	97,45
3	4	2080,9040	0,026011	96,46
4	8	2074,7349	0,025934	96,18
5	10	2073,9677	0,025924	96,14
6	100	2072,6026	0,025907	96,08
7	200	2072,5921	0,025907	96,08
8	300	2072,5902	0,025907	96,08

$$\Delta\ell_R = \frac{RL}{EF_{\text{cp}}}, \quad (10)$$

где F_{cp} — арифметическое среднее значение площади поперечного сечения.

Но из-за условия совместности деформации для заземленного двумя концами стержня переменного сечения должно быть

$$\Delta\ell_R + \Delta\ell_T = 0. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11), получим $\frac{RL}{EF_{\text{cp}}} + \Delta\ell_T = 0$, отсюда имеем

$$R = -\frac{\Delta\ell_T \cdot E \cdot F_{\text{cp}}}{L}.$$

В нашем примере при принятых исходных данных получим



Рис. 4. Поле распределения напряжений по длине стержня переменного сечения

$$R = -\frac{0,025907 \cdot (2 \cdot 10^6) \cdot 7,330376}{20} = -\frac{379816,118}{20} = -18990,8 \text{ кг.} \quad (12)$$

Следует отметить, что если площадь поперечного сечения исследуемого стержня была бы постоянной и $F = \pi \cdot r^2 = \pi$, то величина сжимающего усилия была бы

$$R = -\frac{0,025907 \cdot (2 \cdot 10^6) \cdot \pi}{20} = -8134,9 \text{ кГ.}$$

Значения термоупругого напряжения в любом сечении рассматриваемого стержня переменного сечения определяются в соответствие с законом Гука:

$$\sigma(x) = \frac{R}{F(x)},$$

где $F(x)$ определяется формулой (1). В частности,

$$\sigma(x=0) = \frac{R}{F(x=0)} = \frac{R}{\pi \cdot r_0^2} = -6044,959 \text{ кГ/см}^2;$$

$$\sigma(x=L/2) = \sigma(x=10) = \frac{R}{F(x=10)} = \frac{R}{\pi \cdot r_x^2} = -2686,648 \text{ кГ/см}^2;$$

$$\sigma(x=L) = \sigma(x=20) = \frac{R}{F(x=20)} = \frac{R}{\pi \cdot r_L^2} = -1511,239 \text{ кГ/см}^2.$$

Теперь, пользуясь соотношениями (17) и (1), можем построить поле распределения термоупругого напряжения по длине исследуемого стержня переменного сечения (рис. 4).

Список литературы

1. Михлин С. Г. Вариационно-сеточная аппроксимация / Численные методы и автоматическое программирование: сб. записок научных семинаров, ЛОМИ. М.: Наука, 1974. Т. 48. С. 32–188.

2. Дьяконов Е. Г. Проекционно-разностные и разностные методы решения нелинейных стационарных задач теории упругости и пластичности / Численные методы механики сплошной среды: сб. науч. тр. 1976. Т. 7. № 5. С. 14–78.
3. МАРЧУК Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
4. Дьяконов Е. Г. О некоторых модификациях проекционно-разностных методов // Вестник Московского ун-та, сер. «Вычислительная математика и кибернетика». 1977. № 2. С. 3–19.
5. FUNG Y. C. Foundations of Solid Mechanics. N. J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
6. HUEBNER K. H. The Finite Element Method for Engineers. N. Y.: Wiley, 1975.
7. НОЗДРЕВ В. Ф. Курс термодинамики. М.: Мир, 1967.
8. СЕГЕРЛИНД Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.

*Кудайкулов Анарбай Кудайкулович — д-р физ.-мат. наук, проф.,
зав. кафедрой Евразийского национального
университета им. Л. Н. Гумилева,
e-mail: kudaykulov2006@mail.ru*

*Кенжегулов Бекет Зинешевич — д-р техн. наук, проф.,
декан физ.-мат. факультета Атырауского государственного
университета им. Х. Досмухаметова,
e-mail: kenzegulov_bz@mail.ru, тел.: +7(7122) 27-63-41*

*Утебаев Улан Баймуратович — магистрант 2 курса Атырауского
государственного университета им. Х. Досмухаметова,
e-mail: ulan83utebaev@mail.ru*

*Токкулиев Бахтияр Маратович — магистрант 2 курса Атырауского
государственного университета им. Х. Досмухаметова,
e-mail: bak_84_84@mail.ru*

Дата поступления — 09.07.2015